VORKURS

21.04.2015

Wiederholung

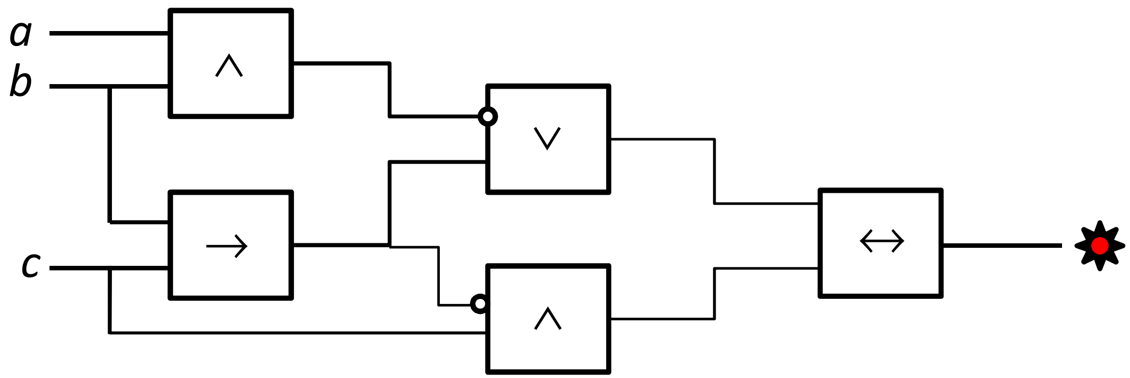
Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen Aussage und Aussageform?
- ✓ Was versteht man unter Bijunktion bzw. Subjunktion?
- ✓ Welche Operatoren stammen direkt aus der Mengenlehre?
- ✓ Was versteht man unter einer Wahrheitstabelle?
- ✓ Was beschreibt die Erfüllungsmenge einer Aussage?
- ✓ Wann benutzt man den Ausdruck Bool?
- ✓ Was versteht man unter einer Formelklasse?
- ✓ Wann hat man eine Folgerung?
- ✓ Wozu benötigt man die Äquivalenz?

AUFGABEN

Geben Sie die Erfüllungsmenge an und ggf. die Aussage bzw. die Schaltung.

1)



2) $\neg(a \leftrightarrow b \vee c) \leftrightarrow c \wedge \neg a \rightarrow b$

3) $x \rightarrow \neg y \wedge z \leftrightarrow z \vee \neg x \rightarrow y$

AUFGABEN

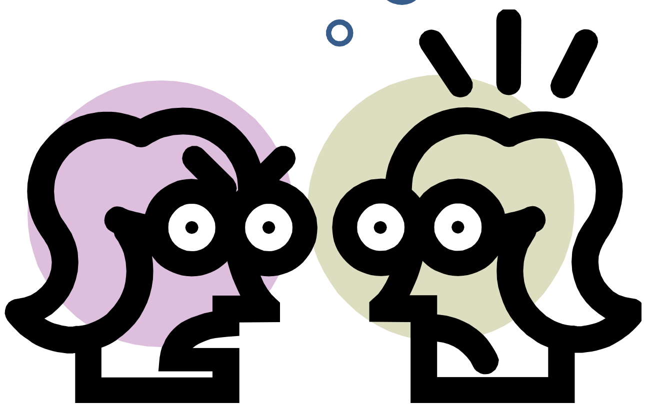
1. Geben Sie die Erfüllungsmenge folgender Aussage an und begründen Sie die zugrundeliegende Formelklasse. $A(p,q,r) = (r \vee (p \rightarrow q)) \wedge (\neg r \vee q)$

2. Prüfen Sie ob die beiden Aussagen $T_1(a,b,c) = a \wedge b \rightarrow c$ und $T_2(a,b,c) = (a \rightarrow c) \vee (b \rightarrow c)$ identisch sind. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

3. Gegeben sind die beiden Ausdrücke $A_1(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z)$ und $A_2(x,y,z) = (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge y)$
   Ist die Subjunktion von A_2 auf A_1 allgemeingültig?

ARITHMETIK

Die Klammer sprach: „Zuerst komm ich,
Gefolgt vom Punkt und dann der Strich“



BINOMISCHE FORMELN I

1. Binom: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binom: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

<u>Methodik:</u>

1. Quadrierung der linken Variablen
2. Das Doppelte von linker mal rechter Variablen
3. Quadrierung der rechter Variablen

Beispiel:

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3y) + (-3y)^2$$
$$(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$
$$(-4x^3+2y^2)^2 = 16x^6 - 16x^3y^2 + 4y^4$$

BINOMISCHE FORMELN II

3. Binom: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Beispiel:

$$(-3x+2y)\cdot(-3x-2y)=9x^2+6xy-6xy-4y^2$$

oder einfacher

$$(-3x+2y)\cdot(-3x-2y)=9x^2-4y^2$$

Anwendungsbeispiele:

- Entfernen einer Wurzel aus einer Summe
- Entfernen des Imaginäranteils einer komplexen Zahl (konjugiert komplexe Zahl)

PASCAL'SCHE DREIECK I

Exponent (n)	$(a+b)^n$
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Elemente in der 7. Zeile:

Ganz links: 1

Nebenan: 7, denn $1+6=7$

Nebenan: 21, denn $6+15=21$

Nebenan: 35, denn $15+20=35$

Somit ergibt sich für die 7. Zeile die folgende Struktur:

$$1-7-21-35-35-21-7-1$$

PASCAL'SCHE DREIECK II

Methode des Pascall'schen Dreiecks:

1. Koeffizienten:

Sie gehen an die richtige Zeile des Pascall'schen Dreiecks und schreiben die Koeffizienten mit einem »+« versehen ab.

2. Linke Variable:

Jetzt nehmen Sie den linken Teil der Summe und notieren diesen **in Klammern** hinter die Koeffizienten des ersten Schritts. Anschließend schreiben Sie von **links** anfangend den **höchsten** Exponenten **minus eins** bis zum Exponenten Null über die linke Variable.

3. Rechte Variable:

Nun benutzen Sie den rechten Teil der Summe. Diesen Ausdruck schreiben Sie ebenfalls **in Klammern** hinter den Term aus Schritt zwei. Weil es ja die rechte Variable ist, fangen Sie jetzt auf der **rechten Seite** mit dem **höchsten** Exponenten an und enden auf der linken Seite mit der Null.
Schon sind Sie fertig und können den entstandenen Ausdruck berechnen und zusammenfassen.

1) Berechnen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Binomischen Formeln.

$$(2x - 4y)^2 \cdot (2y + x)^2$$

$$48 \cdot \left(0{,}5x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{4}x - 2y\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x + 2y\right)$$

$$12 \cdot \left(-\frac{2}{3} + 6x\right)^2 \cdot \left((3 - 4x) - 2(5 - 2x)\right)$$

2) Entfernen Sie den Wurzelterm aus dem Nenner.

$$\frac{x-2}{5-2\cdot\sqrt{3x-5}} \quad \frac{\sqrt{x}}{3\cdot\sqrt{2x}+\sqrt{4-x}}$$

3) Bestimmen Sie die Lösung der Aufgaben mit Hilfe des Pascall'schenDreiecks

$$(2x - y)^5 \quad \left(-\frac{1}{2}x - 4\right)^4$$

Ü 4.2.26 *Dividiere:* **a)** $(3ax - 4ay + 3bx - 4by) : (a + b)$;
b) $(6u^2 - 4u^2v + 5uv + 2uv^2 - 4v^2) : (2u - v)$;
c) $(18x^2 - 15x^2y + 10xy^2 - 8y^2) : (3x - 2y)$;
d) $(4x^2 - 3x^2y + 3xy^2 - 4xy + 5xz - 3xyz - yz + z^2) : (x - y + z)$.

Ergänzende Aufgaben:

Ü 4.2.27 *Löse die Klammern auf und fasse gegebenenfalls zusammen:*
a) $3a + (2b - 2a)$; **b)** $4x - (3x + y)$; **c)** $-2u + (3v + 4u)$;
d) $d - e - (d - e)$; **e)** $3c - 4a - (2a - 3c)$; **f)** $5a - (5a + b)$;
g) $4x - (3y + (z - 4x) - z)$; **h)** $5u - 6v - (3w - (6v - 5u + 3w))$;
j) $a - (b - (a + b - (c - 2a + b) + c))$;
k) $2z - (x - (y + x - (z + x) - z))$.

Ü 4.2.28 *Setze Klammern an den gekennzeichneten Stellen:*
a) $a +' c - d'$; **b)** $x -' u + v'$; **c)** $f -' e - d'$; **d)** $a -' c -' d - e' - f'$.

Ü 4.2.29 *Multipliziere aus:*
a) $2u(3a - 4c)$; **b)** $6y(2d + 3c)$; **c)** $5a(x - y)$; **d)** $(-3y)(-x - u)$.

Ü 4.2.30 *Klammere aus:*
a) $28xz - 14xy + 35ux$; **b)** $48abc - 12ab + 36ac$;
c) $9bc + 27abc + 18bcd$; **d)** $15uvw + 18uv - 33uvx$.

Ü 4.2.31 *Multipliziere aus:*

a) $(2x-3z)(4a-2b)$; **b)** $(a+b+c)(d-e)$;
c) $(2a-3b+4c)(6u-5v+8w)$; **d)** $(5ab-6c)(x+y-z)$;
e) $(2x-3z)(4x+5z)$; **f)** $(5a-b)(3a-2b)$;
g) $(2u-2v+3w)(u+4v-6w)$; **h)** $(3a-b)(6x-2y)(3x-b)$;
j) $(x-3)(x+2)(x-1)$; **k)** $(2-x+y)(y-3)(2x+2)$.

Ü 4.2.32 *Klammere aus:*

a) $2ux-uy+6vx-3vy$; **b)** $10ac+6bc+5ad+3bd$;
c) $4ax-12ay-2cx+6cy$; **d)** $au+az+dv-du-av-dz$;
e) $2ax+3by-2ay-3bx+cx-cy$;
f) $ux-vy-wz+vx-wx-uy+wy+uz+vz$;
g) $ab-ay-2bx+3au-6ux+2xy$; **h)** $bx-by-ax+ay$;
j) $3xz+6xy-2y-z$; **k)** $8abcx-2cx-4ab+1$.

Ü 4.2.33 *Dividiere:*

a) $(12uv-18uw+6ux):3u$; **b)** $(7ax+49ay):7a$;
c) $(24abc+36acd-18acx):3ac$.

Ü 4.2.34 *Dividiere:*

a) $(6au-4av-6bu+4bv):(a-b)$;
b) $(12a^2-8a^2b+29ab-6ab^2+15b^2):(4a+3b)$;
c) $(18u^2-3u^2v+2uv^2-8v^2):(3u-2v)$;

Ü 4.0.1 *Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:*
a) $u - 2v - (3u - (2v + 4u))$; b) $x - (y - (x - y))$.

Ü 4.0.2 *Klammern Sie aus:* a) $12bcg - 20abc + 8bcd$;
b) $6au - 2av + 6bu - 2bv$; c) $ax - ay + bx - by$.

Ü 4.0.3 *Multiplizieren Sie aus:* a) $2c(3a - 4b)$; b) $(2a - 3b)(4x - y)$;
c) $(a + b - c)(a - b + c)$.

Ü 4.0.4 *Dividieren Sie:* a) $(12acx - 8cy) : 4c$;
b) $(3ax - 2ay + 3bx - 2by) : (a + b)$;
c) $(x^3 + 2x^2y + 3xy + 4xy^2 + 2y^2) : (x + 2y)$.

Ü 4.2.5 *Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:*
a) $2a + (3b + c)$; b) $d - 2e - (f - 2g)$; c) $4a - 2b - (4a - 3b)$;
d) $5e + 3x + (3x - 4e)$; e) $2u - (u - v) - v$; f) $3a + b + (a - 2b)$.

Ü 4.2.7 *Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:*
a) $2x - 4y - (2x - (x + 3y))$; b) $g + (2f - (g + 2f))$;
c) $u - (v - (2u + (u - v) + v) - u)$; d) $a + b - (2a - (b + a) - b)$.

Ü 4.2.9 *Setzen Sie an den durch ' gekennzeichneten Stellen Klammern:*
a) $x+'y+z+v'$; b) $u-'v-w+x'$; c) $x-'u+v+w'$; d) $x-'y+'u-v'+z'$.

Ü 4.2.14 *Klammern Sie aus:*
a) $5ag+20ab+15ac$; b) $49xz-14xu+21xy$;
c) $8def-4deg+11ade$; d) $6ac-12abc+36acg-18xcx$.

Ü 4.2.17 *Multiplizieren Sie aus:*
a) $(x+2y)(u-3v)$; b) $(2a-3b)(4c-5d)$;
c) $(9a+4b-3c)(6u-3x+4z)$; d) $(4x-2y)(3u+2v)(a+b)$.

Ü 4.2.19 *Multiplizieren Sie aus:*
a) $(4a+3b)(8a-6b)$; b) $(5u-3v)(2u+4v)$; c) $(x-y+z)(x+y-z)$.

Ü 4.2.21 *Klammern Sie aus:*
a) $8au-6av+4bu-3bv$; b) $ax-2ay-2bx+4by$;
c) $12uv-3uy+4vx-xy$; d) $2ab-2bc+2au-2av-2cu+2cv$;
e) $14ax+14az-9by+6bx-21ay-2cx+3cy+6bz-2cz$.

Ü 4.2.24 *Dividieren Sie:*
a) $(24ax-12ay):6a$; b) $(28ux-35vx+14xy):7x$.

1)

Arithmetik:

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $-a+(3-(b+5-(c-2+(a+b))))-(c-4)$

b) $(2y+\frac{1}{2}x)(x-4y)-8(\frac{1}{4}x+y)^2$

2)

$(2a^2-10ab+10ac-17bc+12c^2+6b^2):(a-2b+3c)$

$(8x^2y^2-14xy^2-6xyz+3y^2z-2xy^2z+4x^2y+4x^2yz):(2xy-3y)$

$(a^2b+2cd^2-3ab^2-5c^2d+5abc+abe-2abd-cde-acd+3bcd):(ab-cd)$

3)

$x^3-2x^2-5x+6=0$

$2x^3-22x=8x^2-60$

BRUCHRECHNUNG I

KgV: Kleinste gemeinsame Vielfache

Hier versucht man durch Primfaktorenzerlegung eine Zahl zu finden, die durch die gegebenen Zahlen teilbar sind.
Dies benötigen Sie um Brüche **gleichnamig** zu machen.

$$\frac{5}{56} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5 \cdot (3 \cdot 5)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{75}{840}$$

$$\frac{11}{60} = \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{11 \cdot (2 \cdot 7)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{154}{840}$$

ggT: größter gemeinsamer Teiler:

Auch hier wird durch die Primzahlen eine Zahl gesucht. Nur diesmal müssen die gegebenen Zahlen durch das Produkt daraus teilbar sein.
Diese Methode wenden wir beim **Kürzen** an.

$$\frac{660}{1848} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$$

BRUCHRECHNUNG II

<u>Hauptnenner</u>:
Damit Brüche addiert bzw. subtrahiert werden können, müssen diese im ersten Schritt auf den gleichen Nenner (Hauptnenner) gebracht werden, um abschließend die Zähler zusammen zu fassen.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{8}=\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{12}{12}-\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{3}=\frac{16+36-15}{24}=\frac{37}{24}$$

<u>Doppelbruch</u>:
Bei einem Doppelbruch handelt es sich im Grunde genommen um eine Division von zwei Bruchtermen. Zur Berechnung werden der Zähler / Nenner im ersten Schritt in einen reinen Bruch umgewandelt und abschließend wird der Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert.

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}+\frac{4}{6}}=\frac{\frac{12-10}{15}}{\frac{2+12}{18}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{14}{18}}=\frac{2}{15}\cdot\frac{18}{14}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 2\cdot 7}=\frac{6}{35}$$

BRUCHRECHNUNG III

Eine rationale, endliche Zahl wird in einen Bruch verwandelt, in dem man den Teil hinter dem Komma als separaten Bruch darstellt und diesen dann mit dem ganzen Teil der Zahl addiert.

$$8{,}375 = 8 + 0{,}375 = 8 + \frac{375}{1000} = 8 + \frac{3}{8} = 8\frac{3}{8} = \frac{67}{8}$$

Handelt es sich um eine periodische Zahl, so wird die Zahl vor der Periode getrennt und diese dann in einen Bruch verwandelt und mit dem Rest der Zahl addiert.

$$4{,}166666666\ldots = 4{,}1\overline{6} = 4{,}1 + 0{,}1\overline{6} = \frac{41}{10} + \frac{6}{90} = \frac{125}{30}$$

Kürzen Sie die Brüche soweit als möglich und geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an?

$\frac{48}{1188}$ b) $\frac{312}{54}$ c) $\frac{1688}{792}$

Wandeln Sie die gegebenen Dezimalzahlen in einen Bruch um und Kürzen diesen wenn möglich.

$2{,}0\overline{5}$ b) $8{,}0\overline{12}$ c) $1{,}625$

Bestimmen Sie das Ergebnis der Aufgaben, in dem Sie die Brüche erweitern und zusammenfassen.

$$\frac{2}{5}-\frac{5}{3}+\frac{7}{2}+2\,\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{5}\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\right)\div\left(3+\frac{7}{4}\right)$$

Fassen Sie den Doppelbruch soweit als möglich zusammen.

$$\frac{\frac{4}{7}-\frac{5}{6}}{\frac{9}{14}+\frac{5}{3}}\,\frac{\frac{2}{5}+\frac{4}{3}}{\frac{4}{5}-\frac{10}{13}}\,\frac{\frac{2}{9}+\frac{3}{4}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}$$

Ü 4.5.25 Kürze: a) $\frac{49a^2-14ac+c^2}{14a-2c}$; b) $\frac{28u^2-63v^2}{12u^2+36uv+27v^2}$; c) $\frac{9x^2-25v^2}{3x+5v}$;

d) $\frac{4+4c+c^2}{c+2}$; e) $\frac{9u^2-6u+1}{9u^2-1}$; f) $\frac{27ad+18bd}{81a^2-36b^2}$; g) $\frac{x+x^2}{x^2-1}$;

h) $\frac{ax^2-ay^2}{2ax-3ay}$.

Ü 4.5.26 Addiere: a) $\frac{5}{6}+\frac{4}{15}-\frac{1}{10}$; b) $\frac{3}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{4}{21}$;

c) $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$; d) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2$; e) $\frac{u-v}{uv}-\frac{u-w}{uw}+\frac{v-w}{vw}$; f) $\frac{a-b}{a+b}-\frac{a}{a-b}$;

g) $\frac{1}{c+2}-\frac{1}{3a}+\frac{2b+1}{6ab}$; h) $\frac{2u^2-13v^2}{(2u-5v)^2}-\frac{2u+5v}{4u-10v}$; j) $\frac{4x-5}{2x-2}-\frac{6x+1}{3x-4}$;

k) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$; l) $\frac{x}{4x-8}-\frac{2x}{3x+6}+\frac{2x^2-9x}{5x^2-20}$

Ü 4.5.27 Berechne: a) $\frac{2}{7}:\frac{8}{21}$; b) $\frac{19}{27}:\frac{38}{63}$; c) $\frac{28ac}{9bd}:\frac{7ab}{12cd}$

d) $\frac{4xy}{7z}:\frac{8xy}{21z}$; e) $\frac{4u^2-16v^2}{3(u+v)}:\frac{2u-4v}{3u+6v}$.

Ü 4.5.28 Vereinfache: a) $\frac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$; b) $\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}}$ X; c) $\frac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{1-\frac{a}{a-b}}$.

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?