

Musterlösung Vorkursklausur 2020

- 1) Menge A: $A = \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 13; 16\}$
 Menge B: $B = \{2; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 14; 15; 16\}$
- a) $A \cap B$: $\{4; 6; 10; 12; 16\}$
 b) $A \cup B$: $\{x \in \mathbb{N} | x \geq 1 \wedge x \leq 16\}$
 c) $A \setminus B$: $\{x \in \mathbb{N} \setminus \{5\} | x \bmod 2 < 0 \wedge x \leq 13\} = \{1; 3; 7; 9; 11; 13\}$
 d) $B \setminus A$: $\{2; 5; 8; 14; 15\}$

- 2) Formel 1: $A_1(a,b,c) = (a \wedge b) \vee \neg(a \leftrightarrow b) \wedge c$
 Formel 2: $A_2(a,b,c) = ((b \wedge c) \vee (b \wedge a)) \vee (a \wedge c)$

Es ist die Äquivalenz zu zeigen: $(a \wedge b) \vee \neg(a \leftrightarrow b) \wedge c \leftrightarrow ((b \wedge c) \vee (b \wedge a)) \vee (a \wedge c)$

Wahrheitstabelle:

a	W	W	W	W	F	F	F	F
b	W	W	F	F	W	W	F	F
c	W	F	W	F	W	F	W	F
$(a \wedge b)$	W	W	F	F	F	F	F	F
$(a \leftrightarrow b)$	W	W	F	F	F	F	W	W
$\neg(a \leftrightarrow b)$	F	F	W	W	W	W	F	F
$\neg(a \leftrightarrow b) \wedge c$	F	F	W	F	W	F	F	F
$(a \wedge b) \vee \neg(a \leftrightarrow b) \wedge c$	W	W	W	F	W	F	F	F
$(b \wedge c)$	W	F	F	F	W	F	F	F
$(b \wedge a)$	W	W	F	F	F	F	F	F
$(b \wedge c) \vee (b \wedge a)$	W	W	F	F	W	F	F	F
$(a \wedge c)$	W	F	W	F	F	F	F	F
$((b \wedge c) \vee (b \wedge a)) \vee (a \wedge c)$	W	W	W	F	W	F	F	F
$A_1(a,b,c) \leftrightarrow A_2(a,b,c)$	W	W	W	W	W	W	W	W

Es gilt $E[A] = Bool^3$ und somit handelt es sich um eine Tautologie, wodurch die Äquivalenz der Aussagen bzgl. der Schaltung gilt, d.h. sie sind identisch: $A_1(a,b,c) \Leftrightarrow A_2(a,b,c)$

$$3) \text{ a) } 2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4x} - \left(\frac{7}{12} + \frac{3}{4}\right) = \frac{24x + 12 - 8x - 3 - 7x - 9x}{12x} = \frac{9}{12x} = \frac{3}{4x}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{3a}{b} - 2 + \frac{b}{3a}}{\frac{18a}{b} - \frac{2b}{a}} = \frac{\frac{9a^2 - 6ab + b^2}{3ab}}{\frac{18a^2 - 2b^2}{ab}} = \frac{(3a-b)^2}{3ab} \cdot \frac{ab}{2 \cdot (3a-b) \cdot (3a+b)} = \frac{3a-b}{18a+6b}$$

$$4) \text{ a) } \left(\frac{4}{x^2}\right)^2 \cdot (xy^2 + 0,5x)^4 - 8y^2 \cdot (1+3y^2+4y^4) = \frac{16}{x^4} \cdot (x^4y^8 + 2x^4y^6 + \frac{3}{2}x^4y^4 + \frac{1}{2}x^4y^2 + \frac{1}{16}x^4) - 8y^2 - 24y^4 - 32y^6$$

$$16y^8 + 32y^6 + 24y^4 + 8y^2 + 1 - 8y^2 - 24y^4 - 32y^6 = 16y^8 + 1$$

$$\text{b) } -6 \cdot (-3x - 2 \cdot (y - (4x + y - 3 \cdot (2x - y)) + z - x) - 2 \cdot (3y + z)) - 6 \cdot (-3x - 2 \cdot (y - 4x - y + 6x - 3y + z - x) - 6y - 2z) = -6 \cdot (-3x - 2 \cdot (x - 3y + z) - 6y - 2z) = 30x + 24z$$

$$5) \text{ a) } z = 2 \cdot \frac{5i}{3i-4} - \frac{6i-4}{2-i} + \frac{1}{5}i = \frac{10i}{3i-4} \cdot \frac{3i+4}{3i+4} - \frac{6i-4}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} + \frac{i}{5} = \frac{10i \cdot (3i+4)}{(3i)^2 - 4^2} - \frac{(6i-4) \cdot (2+i)}{2^2 - i^2} + \frac{i}{5}$$

$$z = \frac{-30 + 40i}{-25} - \frac{12i + 6i^2 - 8 - 4i}{5} + \frac{i}{5} = \frac{5 \cdot (-6 + 8i)}{-25} - \frac{8i - 14}{5} + \frac{i}{5} = \frac{-(-6 + 8i) - (8i - 14) + i}{5}$$

$$z = \frac{6 - 8i - 8i + 14 + i}{5} = \frac{20 - 15i}{5} = \frac{20}{5} - \frac{15}{5}i = 4 - 3i$$

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi \approx 323^\circ$$

$$r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{b) } z^3 + (6-2i) \cdot z^2 - 2i \cdot z \cdot (3-4i) = 0$$

$$z \cdot [z^2 + (6-2i) \cdot z + (-8-6i)] = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \vee z^2 + (6-2i) \cdot z + (-8-6i) = 0$$

$$z_{2,3} = -\frac{6-2i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6-2i}{2}\right)^2 - (-8-6i)} = -(3-i) \pm \sqrt{(3-i)^2 + 8 + 6i}$$

$$z_{2,3} = -3+i \pm \sqrt{9-6i+i^2+8+6i} = -3+i \pm \sqrt{16} \Rightarrow z_2 = 1+i \vee z_3 = -7+i$$

$$z_1 = 0 \wedge r_1 = 0 \wedge \alpha_1 = 0^\circ$$

$$z_2 = 1+i \wedge r_2 = \sqrt{2} \wedge \alpha_2 = \arctan(1)$$

$$z_3 = -7+i \wedge r_3 = \sqrt{50} \wedge \alpha_3 = \arctan\left(-\frac{1}{7}\right) + \pi$$

$$6) \text{ a) } \frac{9 \cdot (0,5 \cdot x^2 y^{-2} z)^4}{54 \cdot (4 \cdot x^{-2} y^3 z^{-2})^{-3}} \cdot \frac{36 \cdot (2 \cdot x^2 y^5 z^{-4})^2}{16 \cdot (3 \cdot x^4 y^3 z^{-4})^3} = \frac{3^2 \cdot 2^{-4} \cdot x^8 y^{-8} z^4}{3^3 \cdot 2 \cdot 2^{-6} \cdot x^6 y^{-9} z^6} \cdot \frac{2^4 \cdot 3^3 \cdot x^{12} y^9 z^{-12}}{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot x^4 y^{10} z^{-8}} = \frac{2 \cdot x^{10}}{z^6}$$

$$b) \quad 4^{ld3} - \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{4 \ln 0,25} + 4 \cdot \log \sqrt{1000} - \frac{1}{2} \cdot ld 64 - 0,01^{\log 0,5} + 12 \ln \sqrt[3]{e^2}$$

$$2^{2 \cdot ld 3} - e^{\frac{1}{2} \cdot 4 \ln 0,25} + \log \left(10^{\frac{3}{2}}\right)^4 - ld \left(2^6\right)^{\frac{1}{2}} - 10^{-2 \log 0,5} + \ln \left(e^{\frac{2}{3}}\right)^{12} = 9 - 16 + 6 - 3 - 4 + 8 = 0$$

$$c) \quad \frac{\sqrt[2n]{a^{3n+7}}}{\sqrt[n]{a^{5-2n}}} \cdot \left(\sqrt[4n]{a^2}\right)^{5n-2} = \frac{a^{\frac{3n+7}{2n}}}{a^{\frac{5-2n}{2n}}} \cdot a^{\frac{5n-2}{2n}} = a^{\frac{3n+7-(5-2n)+5n-2}{2n}} = a^{\frac{10n}{2n}} = a^5$$

$$d) \quad 3 \log x - 2 \log \frac{2}{x^2} - 3 \log 4 + 4 \log \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\log x^4 - \frac{1}{2} \log 256\right) - \frac{1}{3} \log \frac{1}{8}$$

$$\log x^3 - \log \frac{4}{x^4} - \log 4^3 + \log x^2 = \log x^2 - \log 256^{\frac{1}{4}} - \log \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log \frac{x^3 \cdot x^2}{x^4 \cdot 4^3} = \log \frac{x^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^7 = 128 \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{128} = 2$$

$$7) \text{ a) } f(x) = -0,5 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 16 = -0,5 \cdot (x^2 - 12x + 32) = -0,5 \cdot (x-8) \cdot (x-4)$$

Achsenschnittpunkte: $S_y = (0/-16) \vee S_{x_1} (8/0) \vee S_{x_2} (4/0)$

Scheitelpunkt: $S = (6/f(6)) = (6/2)$ ist ein Hochpunkt, da $-0,5 > 0$

Verlauf: Die Parabel ist nach unten geöffnet, da $-0,5 > 0$
Die Parabel verläuft flacher, da $|-0,5| < 1$

$$b) \quad f(x) = 3 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 81 = 3 \cdot (x^2 + 6x - 27) = 3 \cdot (x+9) \cdot (x-3)$$

Achsenschnittpunkte: $S_y = (0/-81) \vee S_{x_1} (-9/0) \vee S_{x_2} (3/0)$

Scheitelpunkt: $S = (-3/f(-3)) = (-3/108)$ ist ein Tiefpunkt, da $3 > 0$

Verlauf: Die Parabel ist nach oben geöffnet, da $3 > 0$
Die Parabel verläuft steiler, da $|3| > 1$

$$8) \text{ a) } \frac{36x-108}{x-3} = x^3 + 3x^2 - 16x - 12 \Rightarrow D = R/\{3\}$$

$$36x-108 = (x^3 + 3x^2 - 16x - 12) \cdot (x-3) \Leftrightarrow 36x-108 = x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 12x - 3x^3 - 9x^2 + 48x + 36$$

$$x^4 - 25x^2 + 144 = (x^2 - 16) \cdot (x^2 - 9) = (x-4) \cdot (x+4) \cdot (x-3) \cdot (x+3) = 0$$

$$\Rightarrow L = \{-4; -3; 4\}$$

$$b) \quad x^3 + 5x = 6 \cdot (x^2 - 2) \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 5x + 12$$

$$(x^3 - 6x^2 + 5x + 12) : (x+1) = x^2 - 7x + 12$$

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x-4) = 0 \Rightarrow L = \{-1; 3; 4\}$$

9) a) $|9 - 3x| > 2 \cdot (x + 2)$

$x \geq 3$	$x < 3$
$-9 + 3x > 2x + 4 \Leftrightarrow x > 13$	$9 - 3x > 2x + 4 \Leftrightarrow -5x > -5 \Leftrightarrow x < 1$
$x > 13$	$x < 1$
Probe: $x = 14 \Rightarrow 9 - 42 = 33 > 32$	Probe: $x = 0 \Rightarrow 9 - 0 = 9 > 4$

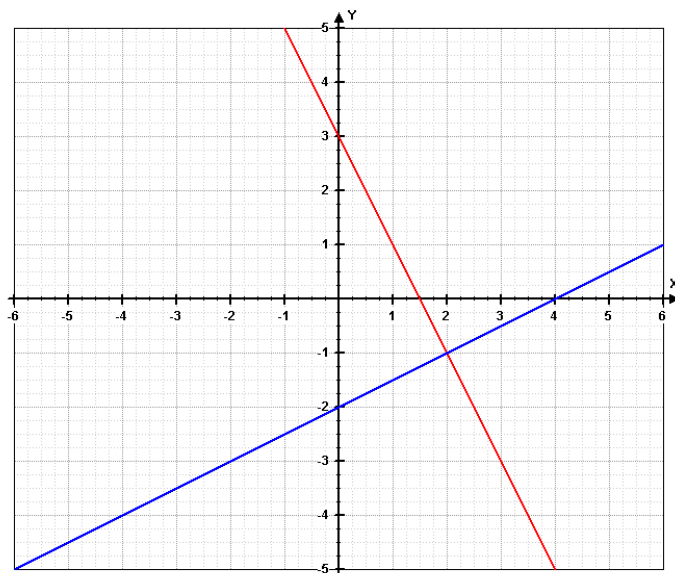
$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 13 \vee x < 1\}$$

b) $4 \cdot \frac{5 - x^2}{6 - 2x} \geq 2x + 5$

$x < 3$	$x > 3$
$20 - 4x^2 \geq (2x + 5) \cdot (6 - 2x) = 12x - 4x^2 + 30 - 10x$ $20 \geq 2x + 30 \Leftrightarrow x \leq -5$	$20 - 4x^2 \leq (2x + 5) \cdot (6 - 2x) = 12x - 4x^2 + 30 - 10x$ $20 \leq 2x + 30 \Leftrightarrow x \geq -5$
$x \leq -5$	$x > 3$
Probe: $x = -7 \Rightarrow 4 \cdot \frac{5 - 49}{6 + 14} = \frac{-44}{5} \geq -14 + 5 = -9$	Probe: $x = 4 \Rightarrow 4 \cdot \frac{5 - 16}{6 - 8} = \frac{-44}{-2} \geq 8 + 5 = 13$

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \vee x \leq -5\}$$

10) a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2y + 4 = x \end{cases} \Rightarrow y = -2x + 3 \wedge y = \frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow S(2/-1)$



b) Gauß-Verfahren:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 2 \cdot y - z = -5 \\ x - 3 \cdot y + 2 \cdot z = 8 \\ 2 \cdot x - y + 5 \cdot z = 13 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} | \cdot 1 \\ | \cdot (2) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 2 \cdot y - z = -5 \\ 0 - y + z = 3 \\ 0 + 3 \cdot y + 3 \cdot z = 3 \end{array} \right\} | \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x + 2 \cdot y - z = -5 \\ 0 - y + z = 3 \\ 0 + 0 + 6 \cdot z = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow L = \{(1; -1; 2)\}$$

c) Gleichsetzungsverfahren:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{5}x - 4y = -4 \\ 6x - 24y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 10y - 10 \wedge x = 4y + 2$$

$$10y - 10 = 4y + 2 \Leftrightarrow 6y = 12 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow L = ((10; 2))$$

$$11) g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 + 1 \\ -5 - 4 \\ 8 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ -5 + 1 \\ 7 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \gamma = \frac{3}{2} \wedge \gamma = \frac{9}{4} \wedge \gamma = \frac{15}{6}$$

Die beiden Richtungsvektoren sind linear unabhängig.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 15 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\alpha - 2\beta = 2 \\ -9\alpha + 4\beta = -5 \\ 15\alpha - 6\beta = 8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\alpha - 2\beta = 2 \\ 0 - 2\beta = 1 \\ 0 + 4\beta = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} \wedge \alpha = \frac{1}{3}$$

Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $(0; 1; -2)$

$$12) f(x) = 3 \cdot \sin(0,25x - 9,5\pi) - 5$$

Additionstheorem:

$$\sin\left(\frac{1}{4}x - \frac{19}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot \cos\left(\frac{19}{2}\pi\right) - \cos\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot \sin\left(\frac{19}{2}\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{4}x\right) - 5$$

Wertebereich:

$$3 \cdot [-1;1] - 5 = [-3;3] - 5 \Rightarrow W = y \in [-8; -2]$$

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$$f(x) = f(-x)$$

$$3 \cdot \cos\left(\frac{1}{4}x\right) - 5 = 3 \cdot \cos\left(-\frac{1}{4}x\right) - 5$$

$$\cos\left(\frac{1}{4}x\right) = \cos\left(-\frac{1}{4}x\right)$$

$$\text{Periode: } P = 2\pi \cdot \frac{4}{1} = 8\pi$$

$$f(x) = f(x + 8\pi)$$

$$3 \cdot \cos\left(\frac{1}{4}x\right) - 5 = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{4}(x + 8\pi)\right) - 5$$

$$\cos\left(\frac{1}{4}x\right) = \cos\left(\frac{1}{4}x + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot \cos(2\pi) - \sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot \sin(2\pi) = \cos\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot 1 - \sin\left(\frac{1}{4}x\right) \cdot 0 = \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$$