MATHEMATIK

11.07.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was versteht man unter der Nullform einer Gleichung?
- ✓ Wie / warum funktioniert der Satz von Vieta?
- ✓ Was sind Linearfaktoren?
- ✓ Warum ist p-q-Formel und quadratische Ergänzung identisch?
- ✓ Warum muss bei der QE stets subtrahiert werden?
- ✓ Wann spricht man von einer biquadratischen Gleichung?
- ✓ Wann sollte man substituieren?
- ✓ Was versteht man unter einer Resubstitution?

AUFGABEN

I. Bestimmen Sie bei den folgenden Ausdrücken die Lösungsmenge.

1) $2 \cdot x^2 - 8 \cdot x = 10$

2) $3 \cdot x^2 = 9 \cdot x - 30$

3) $\frac{1}{4} \cdot x^2 + 3 \cdot x + 8 = 0$

Wenden Sie je ein Verfahren an

II. Bestimmen Sie alle relevanten Eigenschaften der gegebenen Parabeln.

4) $f(x) = -2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 18$

5) $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 10 \cdot x + 32$

- ✓Verlauf
- ✓Achsenschnittpunkte
- ✓Scheitelpunkt
- ✓Symmetrie

III. Bestimmen Sie die Lösung folgender Bi-Quadratischen Gleichungen.

7) $x^4 - 24 \cdot x^2 = 25$

8) $x^8 + 16 = 17 \cdot x^4$

(FREPL)-METHODIK

Beim Lösen einer beliebigen Gleichung kann abgesehen von der Fallunterscheidung (F) stets mit folgender Methodik gearbeitet werden:

- ✓ **F**allunterscheidung:
  Je nach Aufgabenstellung muss definiert werden, für welchen Bereich die Betrachtung gilt.
- ✓ **R**echnung:
  Die zugrundeliegende Gleichung wird mittels elementarer Umformungen gelöst.
- ✓ **E**rgebnis:
  Durch die Berechnungen ergeben sich eine oder auch mehrere Ergebnisse.
- ✓ **P**robe:
  Mittels Probe bzw. Abgleich mit dem Definitionsbereich wird der Ergebnisraum untersucht.
- ✓ **L**ösung:
  Aufgrund er Probe kann nun die Lösungsmenge angegeben werden.

BETRAGSFUNKTION I

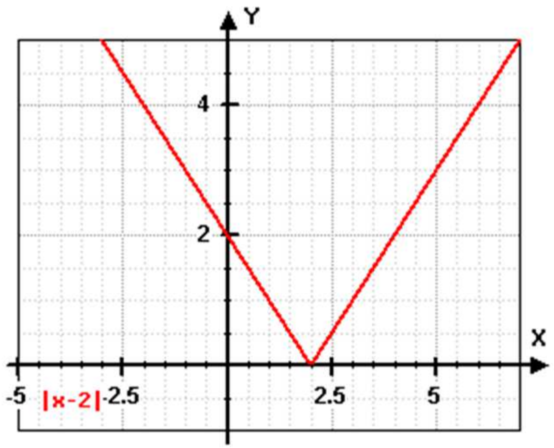
Da es sich bei dem Betrag einer Zahl um die reine **positive** Darstellung handelt, wird sie graphisch als sogenannte **V-Funktion** dargestellt.
Die Betragsstriche können weggelassen werden, in dem man den negativen Bereich mit einem **zusätzlichen Minus** vor dem Term versieht.

Beispiel:

$$f(x) = |x-2|$$

$x < 2$: $f(x) = -(x-2) = -x+2$

$x \geq 2$: $f(x) = x-2$



Aufgrund der Knickstelle ist die Betragsfunktion an der Schnittstelle mit der X-Achse **nicht differenzierbar**, d.h. es kann keine Steigung berechnet werden.

BETRAGSFUNKTION II

Ungleichungen, die auf einer Betragsfunktion basieren, können auch mittels (FREPL)-Methodik gelöst werden.

<u>Beispiel</u>: $|2x-8|>6$

$x>4 \Rightarrow 2x-8>6$	$x \le 4 \Rightarrow -(2x-8)>6$	Fallunterscheidung
$2x-8>6 \Leftrightarrow 2x>14$ $\Rightarrow x>7$	$-2x+8>6 \Leftrightarrow -2x>-2$ $\Leftrightarrow x<1$	Rechnung
$x>7$	$x<1$	Ergebnis
$x=8 \Rightarrow \lvert 2\cdot 8-8\rvert=8>6$	$x=0 \Rightarrow \lvert 2\cdot 0-8\rvert=\lvert -8\rvert=8>6$	Probe
$L=\{x\in R \mid x>7 \vee x<1\}$		Lösung

Durch Multiplikation / Division mit negativen Zahlen dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

AUFGABEN

I. Skizzieren Sie folgende drei Betragsfunktionen

1) $f(x) = \left| \frac{2}{3}x - 2 \right|$

2) $g(x) = |x^2 - 7x + 12|$

3) $h(x) = |\cos(x)|$

II. Geben Sie den zugehörigen Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen an.

4) $|3 - x| < 2$

5) $|4x - 12| > 8$

BRUCHUNGLEICHUNGEN

Ungleichungen, die auf einem **Bruch** basieren, können ebenfalls mittels „**FREPL**“ gelöst werden. Da für gewöhnlich im ersten Rechenschritt mit dem **Nenner multipliziert** wird, muss an dieser Stelle die **Fallunterscheidung** genutzt werden, um die Multiplikation mit einem negativen Ausdruck mathematisch korrekt darstellen zu können.

Beispiel: $\frac{3x-2}{x-3} > 2 \quad | \cdot (x-3)$

Umkehrung des Ungleichheitszeichen

$x > 3 \Rightarrow 3x-2 > 2\cdot(x-3)$	$x < 3 \Rightarrow 3x-2 < 2\cdot(x-3)$	Fallunterscheidung
$3x-2 > 2x-6$ $\Leftrightarrow x > -4$	$3x-2 < 2x-6$ $\Leftrightarrow x < -4$	Rechnung
$x > 3$	$x < -4$	Ergebnis
$x = 4 \Rightarrow \frac{3\cdot 4-2}{4-3} = \frac{10}{1} > 2$	$x = -5 \Rightarrow \frac{3\cdot(-5)-2}{(-5)-3} = \frac{-17}{-8} > 2$	Probe

$$L = \{x \in R \mid x > 3 \vee x < -4\}$$ Lösung

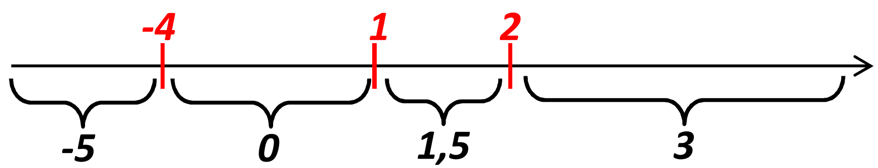
POLYNOMUNGLEICHUNGEN

Handelt es sich um ein Polynom vom Grade >1, so werden im ersten Schritt die Nullstellen der Gleichung bestimmt. Diese gefundenen Ergebnisse repräsentieren die Intervallgrenzen der Ungleichung, wodurch mittels Probe einer Zahl aus dem Intervall die Lösungsmenge bestimmt werden kann (REPL-Methodik).

Beispiel: $x^3 + x^2 - 10x + 8 > 0$ *Polynomdivision liefert:*

$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+4) > 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -4$$

Rechnung



Ergebnis

$$x = -5 : (-5-1)\cdot(-5-2)\cdot(-5+4) < 0 \quad \Rightarrow \textit{falsch}$$

$$x = 0 : (0-1)\cdot(0-2)\cdot(0+4) > 0 \quad \Rightarrow \textit{richtig}$$

$$x = 1{,}5 : (1{,}5-1)\cdot(1{,}5-2)\cdot(1{,}5+4) < 0 \quad \Rightarrow \textit{falsch}$$

$$x = 3 : (3-1)\cdot(3-2)\cdot(3+4) > 0 \quad \Rightarrow \textit{richtig}$$

Probe

$$L = \{x \in R \mid (x > -4 \wedge x < 1) \vee x > 2\}$$

Lösung

AUFGABEN

I. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben die Lösungsmenge an.

1) $\dfrac{2x-5}{4-2x} > \dfrac{1}{2}$

2) $\dfrac{2x+1}{1+x} \geq 3$

3) $\dfrac{x\cdot(3+2x)}{6-2x} > 1-x$

4) $x^2 - 8x > 20$

5) $x^3 + x + 6 > 4x^2$

6) $x^4 - x^2 \leq 25\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

Gleichsetzungsverfahren

Wenn wir ein Gleichungssystem haben, das aus zwei Termen besteht, müssen Sie zuerst beide Gleichungen nach ein und derselben Variablen **auflösen** und dann die entstandenen Ausdrücke **gleichsetzen**.

Methode Gleichsetzungsverfahren

1. Freistellen nach einer Variablen
2. Gleichsetzung der Terme
3. Auflösen nach der verbleibenden Variable

Sie müssen nicht unbedingt nur nach einer Variablen – sprich ohne Faktor – auflösen. Es darf auch ein Vielfaches sein. Sie müssen nur darauf achten, dass beide Gleichungen nach dem **gleichen Vielfachen** freigestellt werden.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 3x + 4y = 18 \\ 6x - 2y = 6 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3x = 18 - 4y \\ 3x = 3 + y \end{vmatrix}$$

Ich habe die erste Gleichung direkt nach 3x aufgelöst und bei der zweiten Zeile zuerst durch zwei dividiert und dann ebenfalls nach 3x freigestellt, so dass wir nun **gleichsetzen** dürfen.

$$18 - 4y = 3 + y \Leftrightarrow -5y = -15 \Leftrightarrow y = 3$$

Jetzt können wir das y in eine der freigestellten Gleichungen einsetzen und nach x auflösen.

$$y = 3: 3x = 3 + y \Leftrightarrow 3x = 3 + 3 = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

Die **Lösung** des obigen Gleichungssystems ist $(2/3)$

Einsetzungsverfahren

Wenn Sie ein Gleichungssystem vor sich haben, das Sie mit dem Einsetzungsverfahren lösen möchten, dann lösen Sie eine der Gleichungen **nach einer Variablen** auf und setzen den entstandenen Ausdruck in die andere Gleichung ein.

Methode Einsetzungsverfahren

1. Freistellen nach einer Variablen
2. Einsetzung in eine Gleichung
3. Auflösen nach der verbleibenden Variable

Auch hier muss die zu ersetzende Variable nicht alleine stehen, sondern kann auch noch einen Faktor haben.

BEISPIEL

Das Einsetzungsverfahren ist ähnlich wie die **Substitution** bei einer biquadratischen Gleichung, denn auch dort haben wir letztendlich ersetzt.

$$\begin{vmatrix} 12x - 5y = 29 \\ 18x + 2y = 34 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 12x - 5y = 29 \\ y = 17 - 9x \end{vmatrix}$$

Hier habe ich die zweite Gleichung zuerst nach $2y$ aufgelöst und dann den Ausdruck durch 2 dividiert.
Nun können wir überall dort wo ein y steht den Ausdruck $(17 - 9x)$ **einsetzen**.

$$12x - 5 \cdot (17 - 9x) = 12x.85 + 45x = 29 \Leftrightarrow 57x = 114$$

Wir haben also $x = 2$ als Lösung und können diese nun nutzen:

$$x = 2: y = 17 - 9x \Leftrightarrow y = 17 - 18 = -1 \Leftrightarrow y = -1$$

Die Lösung des obigen Gleichungssystems ist also $(2/-1)$

Additionssverfahren

Das Additionsverfahren ist nichts anderes als das Gauß'sche Eliminationsverfahren und für jedes Gleichungssystem geeignet. Egal wie viele Unbekannte oder Gleichungen existieren.

Es basiert eigentlich darauf, dass wir versuchen durch **Addition** eine existierende Variable zu **eliminieren**. Die Zeile, mit der wir diese Operation starten nennen wir **Pivot-Zeile**.

Methode Additionsverfahren

1. Definition der Pivot-Zeile
2. Erzeugung von gleichen Faktoren
3. Neutralisation einer Variablen

Wichtig ist, dass Sie am besten **immer** nur addieren. Sie dürften zwar auch subtrahieren, nur ist diese Art der Rechnung aus meinen Erfahrungen heraus zu fehleranfällig.

BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 5x + 3y = 5 \\ 3x + y = -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5x + 3y = 5 \\ -9x - 3y = 3 \end{vmatrix}$$

Wir haben uns die zweite Zeile als **Pivot-Zeile** ausgesucht und diese Gleichung mit (-3) multipliziert, damit die Faktoren vor dem y entgegengesetzt gleich sind.

$$\begin{vmatrix} 5x + 3y = 5 \\ -4x = 8 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x = -2 \wedge 5 \cdot (-2) + 3y = 5 \Leftrightarrow y = 5$$

Die Lösung des obigen Gleichungssystems ist also $(-2/5)$

AUFGABEN

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen, in dem Sie die Funktionen in ein Koordinatensystem eintragen.

   a. $\begin{vmatrix} 2y = 4 - x \\ 3y + 9 = 6x \end{vmatrix}$

   b. $\begin{vmatrix} y - 2x = 4 \\ x + 3y = -9 \end{vmatrix}$

2. Berechnen Sie das folgende Gleichungssystem, indem Sie das Einsetzungsverfahren anwenden.

   a. $\begin{vmatrix} \frac{2}{3}y - 4x = -8 \\ 12x - 3y = 18 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4y - 8x = 24 \\ 3y = 6x + 12 \end{vmatrix}$

3. Wenden Sie zur Lösung das Additionsverfahren an

   a. $\begin{vmatrix} 2x - y = -7 \\ 3x + 4y = 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & & +z & =1 \\ 2x & -2y & & =2 \\ -3x & +2y & +2z & =3 \end{vmatrix}$

4. Nutzen Sie zur Berechnung das Gleichsetzungsverfahren.

   a. $\begin{vmatrix} -\frac{2}{8}x + \frac{3}{4}y = -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{2}x - y = 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x = \frac{1}{15} \\ \frac{2}{3}x = \frac{3}{5} - 3y \end{vmatrix}$

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN I

Existiert ein **eindeutig lösbares** LGS bestehend aus **n Gleichungen mit m Unbekannten** , so kann Die Lösungsmenge mittels dem **Gauß-Algorithmus** bestimmt werden.

Ziel des Verfahrens ist ein durch **elementare Umformungen** ein gestaffeltes Gleichungssystem (**Stufenstruktur**) zu erhalten, in der die Lösungsmenge einfach bestimmt werden kann.

<u>Methodik (Hinrechnung):</u>

1. Bestimmung der vollbesetzten **Pivotzeile** (nur einmal verwendbar).
2. Durch elementare Umformungen der Pivotzeile und Addition auf alle übrigen m-1 Zeilen muss eine **Variable** (Spalte) komplett **neutralisiert** werden.
3. Es bleiben demzufolge nur noch m-1 Gleichungen mit n-1 Unbekannten übrig, mit denen man wieder beim **ersten Schritt** beginnt.

<u>Methodik (Rückrechnung):</u>

1. Sofern nötig werden die **frei wählbaren Variablen** vorbelegt.
2. Berechnung der 1. Unbekannten in der **kürzesten Stufe**.
3. Einsetzen der 1. Unbekannten in die **nächst höhere Stufe** und Bestimmung der 2. Unbekannten.

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN I

Eigenschaften des Gauß Algorithmus:

- ✓ Eine **Pivotzeile** ist eine Gleichung die nur einmalig benutzt werden darf, um eine Variable zu eliminieren. Anschließend darf sie nicht menr „angefasst“ werden.
- ✓ Es dürfen einzelne Gleichungen mit einer Zahl **multipliziert** werden.
- ✓ Nach dem 2. Schritt der Hinrechnung, sollte das entstehende lineare Gleichungssystem vereinfacht (**Sortierung bzw. Ausklammern**) werden.
- ✓ Es dürfen ohne weiteres **parallele Zeilen** miteinander vertauscht werden.
- ✓ Beim **Tausch von Spalten** ist darauf zu achten, dass die Koordinaten des Lösungssystems nun an einer **anderen Position** stehen (durch Markierung kenntlich machen).
- ✓ Das Gauß-Verfahren sollte angewandt werden, sofern entweder **kein quadratisches System** vorhanden ist oder **mindestens eine 4x4-Struktur** vorhanden ist.
- ✓ Sind am Ende des Gauß-Alogithmus **mehr Unbekannte als Gleichungen** vorhanden so werden die Differenz aus Unbekannte-Gleichung als **Parameter** vorbelegt.

GAUßSCHES ELIMINATIONSVERFAHREN III

Beispiel:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{array} \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-2) \quad \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \quad \cdot 2$$

Tausch

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rcccc} 2x_4 & \Rightarrow & x_4 & = & 0 \\ x_3 = -1 - 3x_4 & \Rightarrow & x_3 & = & -1 \\ x_2 = -2 - x_4 - 4x_3 & \Rightarrow & x_2 & = & 2 \\ 2x_1 = 1 - 3x_3 - x_2 & \Rightarrow & x_1 & = & 1 \end{array}\right\} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

AUFGABEN

I. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem grafisch.

$$\left| \begin{array}{l} 2x - y = -7 \\ 3x + 4y = 6 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} y - 2x = 4 \\ x + 3y = -9 \end{array} \right|$$

II. Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mittels Gauß.

$$\left| \begin{array}{r} 2x - y + 3z = 7 \\ 4x + 3y - z = -3 \\ -x + 2y - 3z = -8 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & 2x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & & & +4x_4 & = & 4 \\ -4x_1 & -x_2 & -2x_3 & +x_4 & = & -4 \end{array}$$

AUFGABEN

III. Sie die folgenden Gleichungssysteme. Wenden Sie insgesamt 3 verschiedene Verfahren an.

$$\left| \begin{array}{l} x + 3y = 25 \\ 4x - y = 22 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} -5 = 0{,}25y + 0{,}5x \\ 2y + 4x = 100 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = \frac{1}{12} \\ 2y - \frac{3}{8}x = \frac{9}{4} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} 3y - 2x = 13 \\ 8x + 4y = -4 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} 2y = 1 - 0{,}5x \\ 0{,}25x = 0{,}6 - y \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{2}x = \frac{3}{5} - 3y \end{array} \right|$$

AUFGABEN

1) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem, in dem Sie insgesamt alle 3 Verfahren anwenden.

a) $\left| \begin{array}{l} 3y - 2x = 13 \\ 8x + 4y = -4 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{r} 2y = 1 - 0{,}5x \\ 0{,}25x = 0{,}6 - y \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}y + \frac{1}{6}x = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{2}x = \frac{3}{5} - 3y \end{array} \right|$

2) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden LGS mittels der Cramerschen Regel.

$$\left| \begin{array}{r} x - 3y + z = -2 \\ -x + 2y - 3z = -6 \\ 2x + y + 4z = 16 \end{array} \right|$$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?