MATHEMATIK

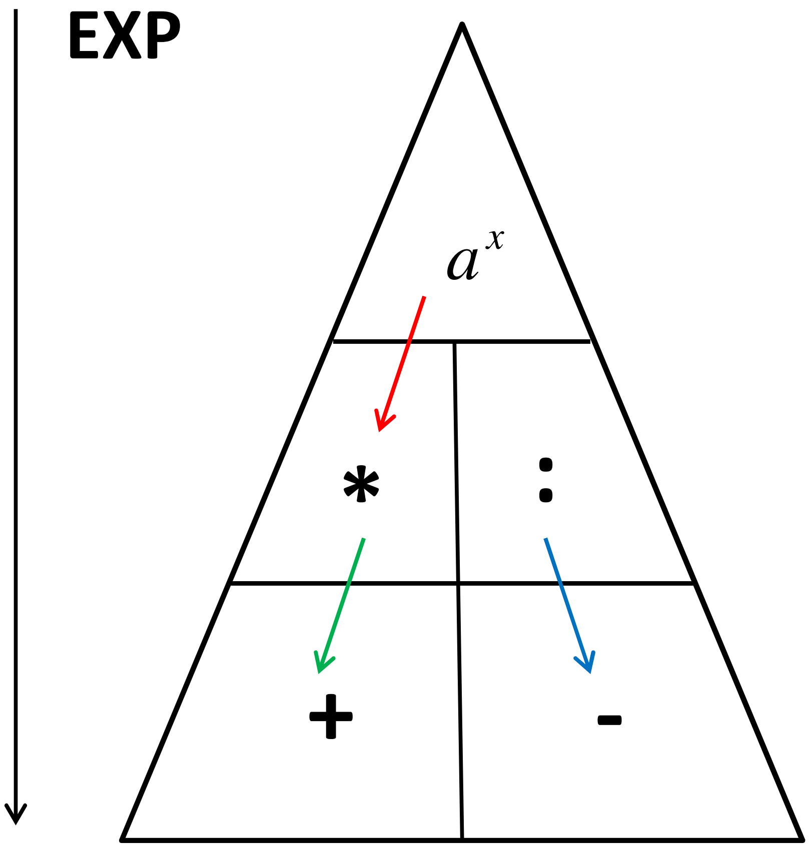
06.06.2019

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was ist die Koeffizientenstruktur des Pascal‘sche Dreieck?
- ✓ Wie funktioniert das Pascal‘sche Dreieck?
- ✓ Was sind die Voraussetzungen für das Pascal‘sche Dreieck?
- ✓ Wann spricht man von einem Linearfaktor?
- ✓ Wie macht man eine Polynomdivision?
- ✓ Wie funktioniert die Primfaktorzerlegung?
- ✓ Wofür nutzt man das kgV?
- ✓ Was ist das ggT?

POTENZGESETZE



$$\left(x^3\right)^4 = x^{3\cdot 4} = x^{12}$$

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

$$\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$$

EIGENSCHAFTEN VON POTENZEN

Wichtige Zusammenhänge für die Potenzberechnung mit rationalem Exponenten:

Polynom:
Der höchste natürliche Exponent bestimmt den Grad des Polynoms $x^n + a \cdot x^{n-1} + \ldots + z \cdot x^0$

Beispiel: $x^5 - 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 12$ *Polynom vom Grade 5*

Wurzel:
Der Grad einer Wurzel steht immer im Nenner des Exponenten $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Beispiel: $\sqrt[3]{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

Brüche:
Ein negativer Exponent wird durch einen Positionswechsel positiv $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Beispiel: $\left(\frac{2}{x^2}\right)^{-2} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$

AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

1) $\sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^6 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$

2) $\frac{(8u^2v^{-2}w)^4}{(81r^{-3}s^{-2}t^3)^2} : \frac{(3^4 r^{-3}s^4t^3)^{-2}}{(2^4u^3v^{-4}w^{-2})^{-3}}$

3) $\frac{\sqrt[k]{a^{2-k}}}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{3k+4}} \cdot \left(\frac{\sqrt[k]{a}}{\left(\sqrt[k]{a^2}\right)^{k+3}} \right)^{-2}$

4) $\sqrt{\frac{y^{-2} \cdot \left(x \cdot z^3\right)^5}{x^{-3} \cdot y^4 \cdot z^7}}$

5) $\frac{(5ab^{-3}c^2)^3}{(2^{-3}x^2y^0)^{-2}} : \frac{(4^{-1}a^{-2}b^0c^3)^2}{(25xy^{-3})^{-2}}$

6) $\left[\frac{\sqrt[2x]{n^{3x-2}}}{\sqrt[2x]{n^{4x-4}}} \cdot \left(\sqrt[2x]{n}\right)^{5x-2} \right]^3$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{x^3} = 125$

b) $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^2 = 1024$

c) $\sqrt[3]{\frac{16}{x^2}} = 0{,}25$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9}$

II) $g(x) = 5 \cdot \left(2x - 8\right)^{-2}$

III) $h(x) = \left(x^2 - 4\right)^2$

AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

1) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4 \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a}} \cdot a^2}$

2) $\dfrac{3(2x^{-2}y^{-3})^2}{4(3a^3b^{-2})^3} \cdot \dfrac{8(3a^4b^{-3})^2}{9(2x^{-1}y^{-2})^3}$

3) $\dfrac{\dfrac{42}{\sqrt[n]{x^{10}}}}{\dfrac{\sqrt[2n]{x^{4n-6}}}{\left(\sqrt[n]{x^2}\right)^{3-2n}}} : \left(\dfrac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{2n+5}}{\sqrt[\frac{n}{2}]{x^{6-n}}}\right)^{-2}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\left(\sqrt[12]{x^6}\right)^3 = 64$

b) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-4} = \dfrac{16}{81}$

c) $\sqrt{\sqrt[5]{x^4}} = \left(\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^2$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{x-2}}$

II) $g(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 7x + 12\right)^{-5}$

OPERATION / GEGENOPERATION

Im Bereich der Arithmetik wird durch Bildung der abhängigen Gegenoperation stets das neutrale Element erzeugt (Multiplikation: 1 und Addition: 0).

<u>Lineare Gleichung:</u>
Mittels einfacher Gegenoperationen und den zugehörigen neutralen Elementen wird eine Gleichung nach der Unbekannten freigestellt.

Beispiel: $3\cdot x-5=4 \Leftrightarrow 3\cdot x-5+5=4+5 \Leftrightarrow 3\cdot x+0=9 \qquad |+5$

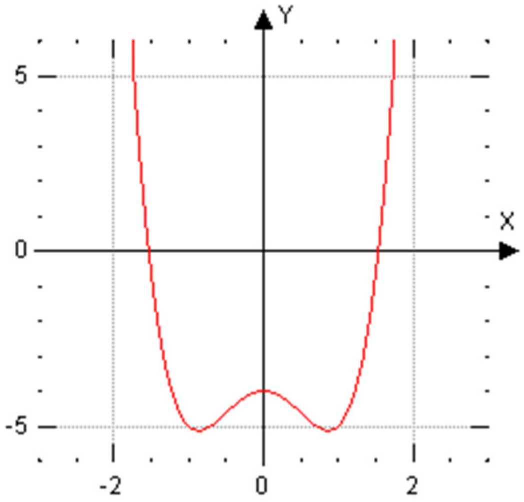
$$3\cdot x+0=9 \Leftrightarrow 3\cdot\frac{1}{3}\cdot x+0=9\cdot\frac{1}{3}=1\cdot x+0=3 \Leftrightarrow x=3 \qquad |:3$$

<u>Potenzgleichung:</u>
Nach Überführung des Terms in einen reinen Potenzausdruck wird der Exponent mittels elementarer Umformungen zum neutralen Element 1 umgewandelt.

Beispiel: $\sqrt[3]{x^2}=4 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}}=4 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3} \Leftrightarrow x^1=\sqrt{64} \Rightarrow x=\pm 8$

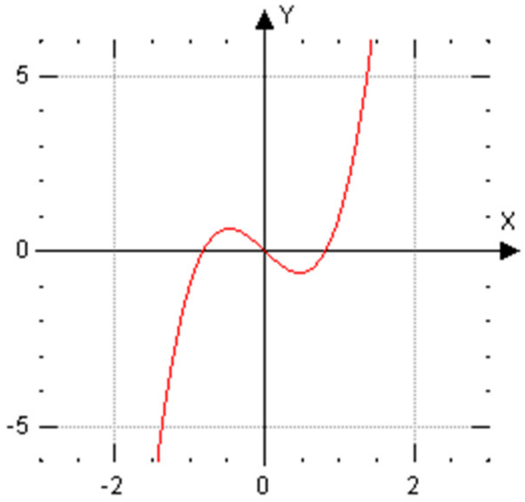
FUNKTIONSGRAPHEN I

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4$$



- Achsensymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 4)

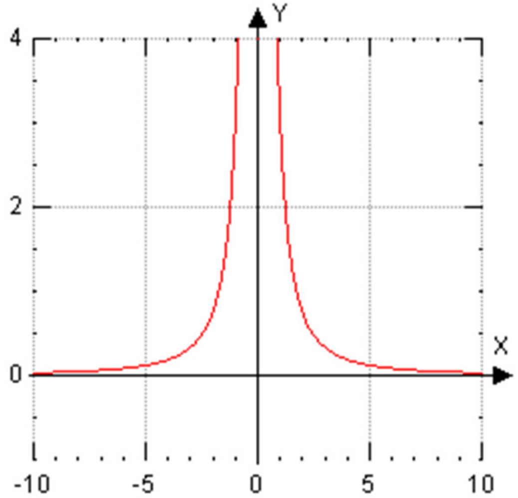
$$f(x) = 3x^3 - 2x$$



- Punktsymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 3)

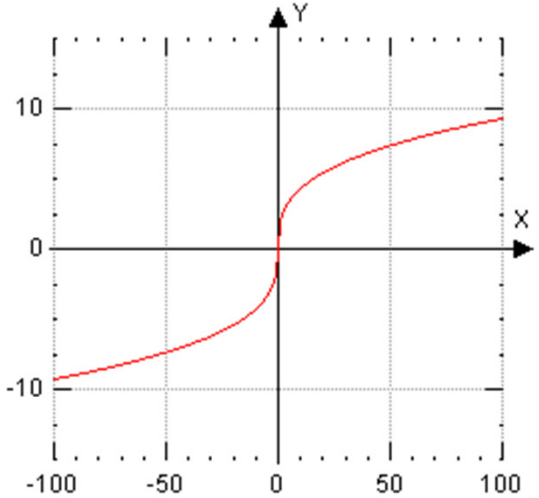
FUNKTIONSGRAPHEN II

$$f(x) = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$$



- Achsensymmetrie
- Hyperbelfunktion

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{x}$$



- Punktsymmetrie
- Wurzelfunktion

DEFINTIONS-/ WERTEBEREICH

Definitionsbereich:
Alle Zahlen, die in einem Ausdruck/ Term **eingesetzt** werden dürfen, werden mittels Mengeneigenschaften in Abhängigkeit der zugehörigen Variablen beschrieben.

- Ein **Polynom** vom Grade n ist stets für alle reellen Zahlen definiert.
- Eine **Wurzel** darf nun aus positiven Termen inkl. der NULL gezogen werden.
- Bei **Brüchen** ist darauf zu achten, dass der Nenner nicht NULL wird.

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{2-x}; D = \{x \in \Re \mid x \leq 2\}$ $\quad g(x) = \frac{x}{x+3}; D = \Re \setminus \{-3\}$

Wertebereich:
Die Zahlen, die durch einen Ausdruck/ Term berechnet werden können, ergeben den Wertebereich einer Funktion (y-Achse).

- Mit **geradem** Exponenten können nicht alle reellen Zahlen abgebildet werden.
- Mit **ungeradem** Exponenten werden alle reellen Zahlen erreicht.
- Bei **Brüchen/ Wurzeln** muss auf Ausnahmen geachtet werden (Definitionsbereich).

Beispiel: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2; W = \{y \in \Re \mid y \geq 2\}$ $\quad g(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}; W = \Re \setminus \{0\}$

AUFGABEN

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- bzw. Wertebereich an, bestimmen das Symmetrieverhalten und zeichnen Sie eine grobe Skizze.

a) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 9}$

b) $g(x) = x^3 - 5x + \frac{1}{2x}$

c) $h(x) = \sqrt[4]{-3 \cdot \left(x^3 - 8\right)}$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?