Mathe-Party Fulda

VORSPEISE

Mengenlehre

1) Gegeben sei die Menge A mit allen Natürlichen Zahlen zwischen 4 und 14, die durch drei teilbar sind und die Menge $B = \{7; 9; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$.
Geben Sie die Lösungsmenge auf je 2 Varianten an (2xAufzählung und 2xEigenschaften).

   a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \backslash B$ d) $A \backslash B$

2) Gegeben sei die Menge $A = \{1; \{2; 3; 4\}; \{5\}; \{\{6\}; 7\}; 8\}$.
Bei welchen der gegebenen Zerlegungen handelt es sich um eine Klasseneinteilung?

   a) $X = \{\{1; \{5\}; \{8\}\}; \{\{2; 3; 4; 7\}\}; \{\{5\}\}\}$
   b) $Y = \{\{\{5\}; \{2; 3; 4\}\}; \{\{6\}; 7\}; \{8; 1\}\}$
   c) $Z = \{\{1; 7; 8\}; \{\{2; 3; 4\}\}; \{\{5\}\}; \{\{6\}\}\}$

3) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck und geben Sie die angewandten Gesetze an.

$$\left(x \vee \left(\overline{y \wedge x}\right)\right) \wedge \left((z \vee x) \vee (\bar{x} \vee z)\right)$$

Exponential-/Logarithmenrechnung

4) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend (Aufgabe a - auseinanderziehen):

a) $ln\left(\sqrt[3]{\frac{x^2\cdot\sqrt{y}}{4\cdot\sqrt{x}\cdot y^{-2}}}\right)$ b) $\frac{(4\cdot a^2\cdot b^{-3}\cdot c)^4}{2\cdot(8\cdot d^2\cdot c^{-2}\cdot e^3)^2}\cdot\frac{(2\cdot a\cdot b^4\cdot c^2)^{-3}}{(0{,}5\cdot a^2\cdot d^{-1}\cdot e^{-2})^4}$ c) $\left[\frac{\sqrt[n]{a^{5-n}}}{(\sqrt[2n]{a})^{2n+4}}\cdot(a^{n+1})^{\frac{3}{n}}\right]^5$

d) $0{,}5\cdot ld4^3+2\cdot e^{3\cdot ln2}-4\cdot\left(log\sqrt{1000}-8^{ld\sqrt[3]{4}}\right)+ln\frac{1}{e^3}-2\cdot 100^{0{,}5log16}$

Komplexe Zahlen

5) Fassen Sie die Ausdrücke zusammen und geben die Lösung in der Form $z=a+bi$ an.

a) $(2-i)^3\cdot(2i^2)^3$ b) $z=\frac{3i-2}{2+i}+\frac{3i}{2+3i}$ c) $z=\frac{(2i)^5\cdot(i+0{,}5)}{4(2i+1)^2}+\frac{(4-2i^3)^2}{(i^2+2i)}$

6) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden komplexen Gleichung und geben die Lösung in der kartesischen und exponentiellen Form an.

$$z^3+(1-2i)\cdot z^2-(i+1)\cdot z=0$$

Gleichungen

7) Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben den Definitionsbereich an.

a) $\sqrt{13-3x} = x-1$

b) $x^3 - 7x = -6$

c) $z^5 - 50 \cdot z^3 + 49 \cdot z = 0$

d) $\frac{2x^2}{x^2+4x} - \frac{5x+4}{3x+12} = \frac{x-5}{3x}$

8) Bestimmen Sie die Lösung der quadratischen Gleichung und wenden dabei stets ein anderes Verfahren (Satz von Vieta, p-q-Formel, quadratische Ergänzung) an.

a) $x^2 - 8x = 48$

b) $x^2 - \frac{1}{6} \cdot (1-x) = 0$

c) $3x^2 - 9 + 6x = 0$

9) Bestimmen Sie bei der folgenden Funktion die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt, den Wertebereich und fertigen Sie eine grobe Skizze an.

a) $f(x) = x^2 - 10x + 21$

b) $g(x) = -x^2 - 2x + 15$

Ungleichungen

10) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen an.

a) $|2x-6| \geq 5$ b) $\frac{x-2}{3+x} \leq 1$ c) $x^2 - 10x \geq 16$

Grenzwerte

11) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und geben das angewandte Verfahren an.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x} - \left(1+\frac{3}{x}\right)^3\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos(5\pi - x\cdot\pi)}{4x-8}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[x]{e}\cdot\frac{3x^2-5x+7}{x-8+6x^2}\right)$

Asymptoten

12) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

a) $f(x) = \frac{2x^3-4x^2-50x+100}{x^3-4x^2-11x+30}$ b) $g(x) = \frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^2+3x+2}$ c) $h(x) = \frac{2x^2+4x-16}{x^3-7x+6}$

Funktionseigenschaften

13) Prüfen Sie für welche Parameter die folgende Funktion stetig und differenzierbar ist.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b;\, x\geq 1 \\ x(2-b)+2a;\, x<1 \end{cases}$$

14) Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten, beweise die Periode und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $f(x)=2\cdot\sin^3(3x+2\pi)-4$ b) $g(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(2-4\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)+3$ c) $h(x)=[3\cdot\cos(2x-1{,}5\pi]^2-2$

15) Prüfen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen.

a) $f(x)=(\cos(x))^4-\ln x^2+42$ b) $h(x)=4\sin^3(x)-\frac{4}{x^5}+2x^3$

Ableitungen

16) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 12 \cdot e^{\sqrt[3]{4-2x^2}}$ b) $g(x) = 0{,}25 \cdot \left(3x^3 - \cos(2x)\right)^4$ c) $h(x) = \dfrac{2 \cdot \sqrt{2x-5}}{(4-3x)^3}$

17) Berechnen Sie von der folgenden Funktion die Wendepunkte und Extrempunkte.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 42$$

Intergale

18) Berechnen Sie die folgenden Integrale und klassifizieren es.

a) $\int \left(2 \cdot e^{4-0,5x}\right) dx$ b) $\int_1^3 \left(x^2 - 6x + 8\right) dx$ c) $\int_2^\infty \left(\frac{4}{x^3}\right) dx$ d) $\int_a^\infty \left(\frac{2}{(2x+3)^3}\right) dx = 0,5$

19) Bestimmen Sie die Fläche zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2 \wedge x - Achse$ b) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{2x+5} \wedge g(x) = x$

20) Geben Sie die zugehörige Stammfunktion der gegebenen Funktionen an.

a) $h(x) = \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x + 5}$ b) $g(x) = \frac{2}{\sqrt{4-3x}}$ c) $f(x) = 3x^2 \cdot \sin(2 - x)$

HAUPTSPEISE

Mengenlehre

21) Gegeben sei die Menge A mit allen Ganzen Zahlen zwischen -3 und 7, die durch 2 teilbar sind und die Menge $B = \{-1;2;3;5;7;8;9\}$.
Geben Sie die Lösungsmenge auf je 2 Varianten an (2xAufzählung und 2xEigenschaften).

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A / B d) B / A

22) Gegeben sei die Menge $A = \{T, O, R\}$.
Geben Sie die zugehörige Potenzmenge $P(A)$ an und geben an, welche der gegebenen Aussagen wahr bzw. falsch sind?

a) $ROT \in P(A)$ b) $\{\ \} \subset P(A)$ c) $\{\{TR\}\} \subset P(A)$
d) $\{T\} \in P(A)$ e) $R \subset P(A)$ f) $\{\{TOR\}\} \in P(A)$
g) $\{TO\} \subset P(A)$ h) $\{\ \} \in P(A)$ i) $\{\{\ \}\} \subset P(A)$

23) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck und geben Sie die angewandten Gesetze an.

$$A \cap (\overline{\overline{B} \cap A}) \cup (\overline{\overline{A} \cup B}) \cup (A \cap B)$$

Exponential-/Logarithmenrechnung

24) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend (Aufgabe a - auseinanderziehen):

a) $\log \dfrac{\sqrt[5]{a^3}\,\dfrac{2}{b^2}}{3x\sqrt[3]{y^2}}$

b) $\dfrac{3(2x^{-2}y^{-3})^2}{4(3a^3b^{-2})^3} \cdot \dfrac{8(3a^4b^{-3})^2}{9(2x^{-1}y^{-2})^3}$

c) $\sqrt{x} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{\sqrt{x} \cdot x^5}}}{x^2 \cdot \sqrt[6]{x^5 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$

d) $2 \cdot \log 0{,}001^3 - e^{2\ln 3} + 4 \cdot \left(4^{ld0{,}5} - 10^{0{,}5 \cdot \log 4}\right) - \dfrac{8}{ld16} + 4\ln\sqrt{\dfrac{1}{e^3}}$

Komplexe Zahlen

25) Fassen Sie die Ausdrücke zusammen und geben die Lösung in der Form $z = a + bi$ an.

b) $\left[(3-i)\cdot(6+2i)^2\right]^3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}i^3\right)^2$

b) $z = \dfrac{4i-3}{i+1} : \dfrac{2i+1}{-3i}$

c) $z = \left(\dfrac{2i-3}{i+1} + (2i-3)^2\right)^2$

26) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden komplexen Gleichung und geben die Lösung in der kartesischen und exponentiellen Form an.

$$2z^2 + (4-8i)\cdot z = (24-8i)$$

Gleichungen

27) Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben den Definitionsbereich an.

a) $\sqrt{7x-12} = x$

b) $\frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 + \frac{7}{4}x^2 = 0$

c) $\frac{1}{4}x^4 = 5x^2 - 16$

d) $\frac{2x+5}{2-3x} = \frac{3-4x}{5+6x}$

28) Bestimmen Sie die Lösung der quadratischen Gleichung und wenden dabei stets ein anderes Verfahren (Satz von Vieta, p-q-Formel, quadratische Ergänzung) an.

a) $4x^2 + 16x = 20$

b) $x^2 = 0{,}5 \cdot (3{,}5x - 1)$

c) $2x^2 - (4x + 6)$

29) Bestimmen Sie bei der folgenden Funktion die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt, den Wertebereich und fertigen Sie eine grobe Skizze an.

a) $f(x) = 24 - 16x + 2x^2$

b) $g(x) = 3 - 2x - x^2$

Ungleichungen

30) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen an.

a) $|8-2x| \leq 3$ b) $\frac{4x}{2-x} > 1$ c) $x^2 + x \geq -5 \cdot (1 + x)$

Grenzwerte

31) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und geben das angewandte Verfahren an.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin(x) - \cos(x)}{\cos(2x)} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\ln(1 + \ln(2-x))}{\sin(\pi x)} \right)$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cdot \frac{2x}{\sqrt{4+x} - 2} \right); (2 Arten)$

Asymptoten

32) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

a) $f(x) = \frac{3x^3 - 3x^2 - 30x - 24}{2x^3 - 6x^2 - 32x - 24}$ b) $g(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{x^2 + x - 6}$ c) $h(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^3 + x^2 - 9x - 9}$

Funktionseigenschaften

33) Überprüfen Sie ob die gegebene Funktion an der Stelle x=0 stetig und differenzierbar ist.

$$f(x) = (x-1)e^{-|x|}$$

34) Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten, beweise die Periode und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $f(x) = -4 \cdot \cos^4(0{,}5x - 3\pi)$ b) $g(x) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3} - \sin(2x + 3\frac{1}{2}\pi\right) - 3$ c) $h(x) = \left[- \cdot \cos(\frac{2}{3}x - 5\pi\right]^3 - 4$

35) Prüfen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \left(x^4 - 12\right)^3$

b) $h(x) = \frac{2}{x} - \sin(3x) + \sqrt[5]{x}$

Ableitungen

36) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $h(x) = \dfrac{4}{\sin^{-3}(5x^2 - \sqrt{x})}$ b) $g(x) = \dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} \cdot \cos\left(\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2 + 3\right)$ c) $f(x) = \left(3x - e^{4x}\right)^3$

37) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und geben den Definitionsbereich an.

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{4 + 5x - x^2}$$

Intergale

38) Berechnen Sie die folgenden Integrale und klassifizieren es.

a) $\int \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \sin(4-3x)dx$ b) $\int_0^{4\pi} (\sin(0{,}5x))dx$ c) $\int_a^{\infty} \left(\frac{1}{(x-4)^2}\right)dx = \frac{1}{3}$ d) $\int_1^4 \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)dx$

39) Bestimmen Sie die Fläche zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \wedge x - Achse$ b) $f(x) = 2x^2 - 5x \wedge g(x) = 2x + x^2 - 12$

40) Geben Sie die zugehörige Stammfunktion der gegebenen Funktionen an.

a) $h(x) = \frac{1}{3x} \cdot \ln x^2$ b) $g(x) = (4-5x)^5$ c) $f(x) = x^2 \cdot e^{4-x}$

NACHSPEISE

<u>Mengenlehre</u>

41) Gegeben sei die Menge A mit allen Natürlichen Zahlen kleiner gleich 36, die durch vier teilbar sind und die Menge $B = \{32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39; 40\}$.
Geben Sie die Lösungsmenge auf je 2 Varianten an (2xAufzählung und 2xEigenschaften).

b) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \setminus B$ d) $A \setminus B$

42) Gegeben sei die Menge $A = \{a; \{b; c\}; \{d\}; \{\{e\}; f\}; g; h\}$.
Welchen der gegebenen Aussagen bzgl. Element bzw. Teilmenge sind wahr?

a) $a; g; d \in A$
b) $\{\{b; c\}\}; \{g; h\} \subset A$
c) $\{b; c; d\} \in A$
d) $\{\ \}; \{\{d\}\} \subset A$
e) $\{\{e\}; f\} \in A$
f) $\{a; g; \{f; \{e\}\}\}; \{d\} \subset A$
g) $\{\ \}; h \in A$
h) $\{\{d; f; c\}\} \subset A$
i) $g; \{d\} \in A$

43) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck und geben Sie die angewandten Gesetze an.

$$X \cup ((Y \cap 1) \cup \overline{X}) \cap \left(\overline{Y \cup \overline{Y}} \cap \overline{X} \right)$$

Exponential-/Logarithmenrechnung

44) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend (Aufgabe a - auseinanderziehen):

a) $ld\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{256 \cdot a^{12}}}{27b^2c}}$

b) $\frac{(5ab^{-3}c^2)^3}{(2^{-3}x^2y^0)^{-2}} : \frac{(4^{-1}a^{-2}b^0c^3)^2}{(25xy^{-3})^{-2}}$

c) $\left[\frac{\sqrt[5n]{x^{4n-1}}}{\sqrt[n]{\sqrt[5]{x^{3-2n}}}} \cdot \left(\sqrt[5]{x}\right)^{\frac{3}{n}+2}\right]^2$

d) $\frac{1}{2} \cdot (\log 10000 - 4) - \frac{3}{e^{2\ln 0{,}5}} + 4^{2+ld2} - (10^3)^{\log 2} + \ln\left(\frac{1}{\sqrt[2]{e^3}}\right)^3 - 3 \cdot ld\sqrt[6]{4}$

Komplexe Zahlen

45) Fassen Sie die Ausdrücke zusammen und geben die Lösung in der Form $z = a + bi$ an.

c) $6i \cdot \left[2i - 4\left(3i + 2 \cdot (3 - 2i)^2\right) - 3i \cdot (4 - i)^2\right]$

b) $\frac{2i - 5}{3 - 1} \cdot \frac{6 + 2i}{3 - 2i}$

c) $\frac{(2i - 1)^4}{3 + 2i} - 4i^3 \cdot (1 - 2i)^3$

46) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden komplexen Gleichung und geben die Lösung in der kartesischen und exponentiellen Form an.

$$z^4 + (4 - 6i) \cdot z^3 - (12i - 21) \cdot z^2 = 0$$

Gleichungen

47) Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben den Definitionsbereich an.

a) $4-5\cdot\sqrt{16+x^2}=2x-7\cdot\sqrt{x^2+16}$

b) $4x^3-48x^2+10x^4-2x^5=0$

c) $x^2\cdot(x^8-30x^3)=32+x^5$

d) $\left(-\frac{0{,}5}{5}-\frac{1}{2yx}\right):\left(\frac{xy}{5}+2+\frac{5}{xy}\right)$

48) Bestimmen Sie die Lösung der quadratischen Gleichung und wenden dabei stets ein anderes Verfahren (Satz von Vieta, p-q-Formel, quadratische Ergänzung) an.

a) $x^2+x=35-x$

b) $x^2-\frac{7x-1}{12}=0$

c) $2x^2-24+8x=0$

49) Bestimmen Sie bei der folgenden Funktion die Achsenschnittpunkte, den Scheitelpunkt, den Wertebereich und fertigen Sie eine grobe Skizze an.

a) $f(x)=x^2+14x+33$

b) $g(x)=-2x^2+28x-80$

Ungleichungen

50) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen an.

a) $\left|8-\frac{1}{2}x\right|>3$ b) $\frac{-3}{6-2x}\leq 4$ c) $x^3-10x+20\geq 3x(x+1)+5$

Grenzwerte

51) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte und geben das angewandte Verfahren an.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(2+\frac{6}{x}\right)^4-\frac{3}{\sqrt[x]{x^2}}+4\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^4(x)-3\sin(x)}{2x\cdot\cos(2x)}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\cdot\frac{3x-12}{5-\sqrt{4x+9}}\right); 2\,Arten$

Asymptoten

52) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionen an den Grenzen des Definitionsbereichs, interpretieren Sie Ihre Ergebnisse, berechnen Sie die Schnittpunkte mit den Achsen und fertigen eine grobe Skizze an.

a) $f(x)=\frac{-5x^3+40x^2-95x-100}{2x^3-22x^2+4x-80}$ b) $g(x)=\frac{x^3+7x^2-36}{x^2+x-30}$ c) $h(x)=\frac{15-8x+x^2}{2x^3-2x^2-64x+120}$

Funktionseigenschaften

53) Überprüfen Sie ob die Funktion für alle reellen Zahlen stetig und differenzierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2}; x > 3 \\ -\dfrac{2}{3}x^2 + 9; x \leq 3 \end{cases}$$

54) Vereinfachen Sie die folgenden Funktionen mittels der Additionstheoreme und bestimmen Sie den Wertebereich, das Symmetrieverhalten, beweise die Periode und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $f(x) = 2 \cdot \sin^3(\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{4}x)$ b) $g(x) = 2 - 5 \cdot \left(2 + \frac{3}{5}\cos(4x - 10{,}5\pi)\right)$ c) $h(x) = \left[\frac{2}{3} \cdot \sin(\frac{1}{5}x + \frac{5}{2}\pi\right]^2 - \frac{2}{3}$

55) Prüfen Sie das Symmetrieverhalten der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{2}{x^4} - ((x-3) \cdot (x+3)^2 + \cos(x)$ b) $h(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - (4x)^{-2} + (5x - x^7)$

Ableitungen

56) Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $h(x)=\dfrac{4x^3-5}{(2x-7)^2}$ b) $g(x)=3e^{4-2x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ c) $f(x)=\left(\sqrt[3]{2x}-4\sin(2x)\right)^5$

57) Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte und geben den Definitionsbereich an.

$$f(x)=9-\frac{21-3x^2}{x-1}$$

Intergale

58) Berechnen Sie die folgenden Integrale und klassifizieren es.

a) $9 \cdot \int \sqrt[3]{5x-2}\,dx$ b) $\int_0^1 \left(3x \cdot e^{1-x}\right)dx$ c) $\int_\alpha^\infty \left(\frac{6}{(4-3x)^2}\right)dx = 1$ c) $\int_1^4 \left(x^3 - 3x^2 - 4x + 12\right)dx$

59) Bestimmen Sie die Fläche zwischen den gegebenen Funktionen.

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 8x + 12 \wedge x-Achse$ b) $f(x) = 2x + 10 \wedge g(x) = -8x - x^2 - 11$

60) Geben Sie die zugehörige Stammfunktion der gegebenen Funktionen an.

a) $h(x) = (3x^2 - 5x)^5 \cdot (18x - 15)$ b) $g(x) = 2 \cdot \sin(\frac{2}{3}x + \pi)$ c) $f(x) = 4\cos(4 - 2x) \cdot \sin(2x + 3)$