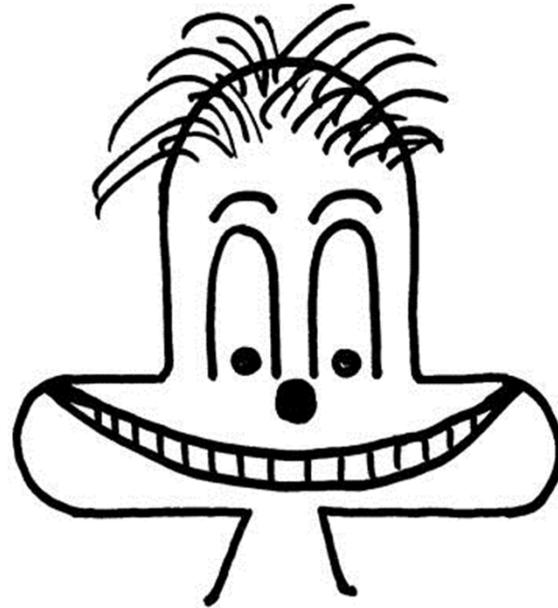


Mathematik Vorkurs



08.09.2021 – 06.10.2021

Vorkurs Mathematik 2021



Torsten Schreiber

Mathematik ist begreifbar...



www.mathematik-guru.de

... und macht sogar Spaß!



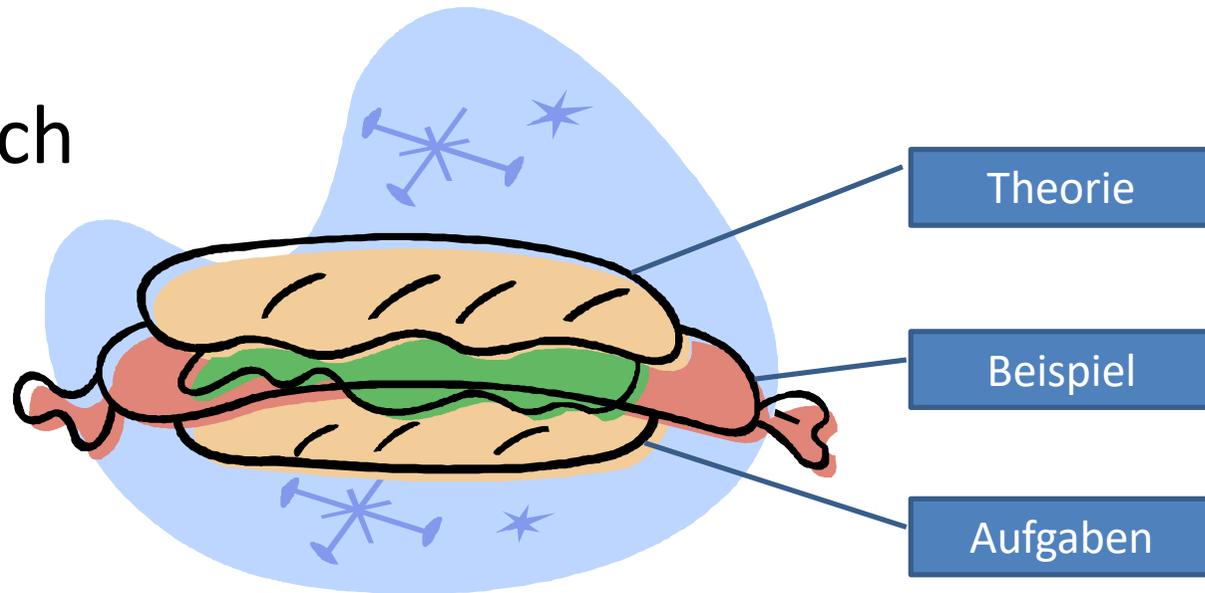
schreiber@mathematik-guru.de

Methodik meiner Veranstaltung

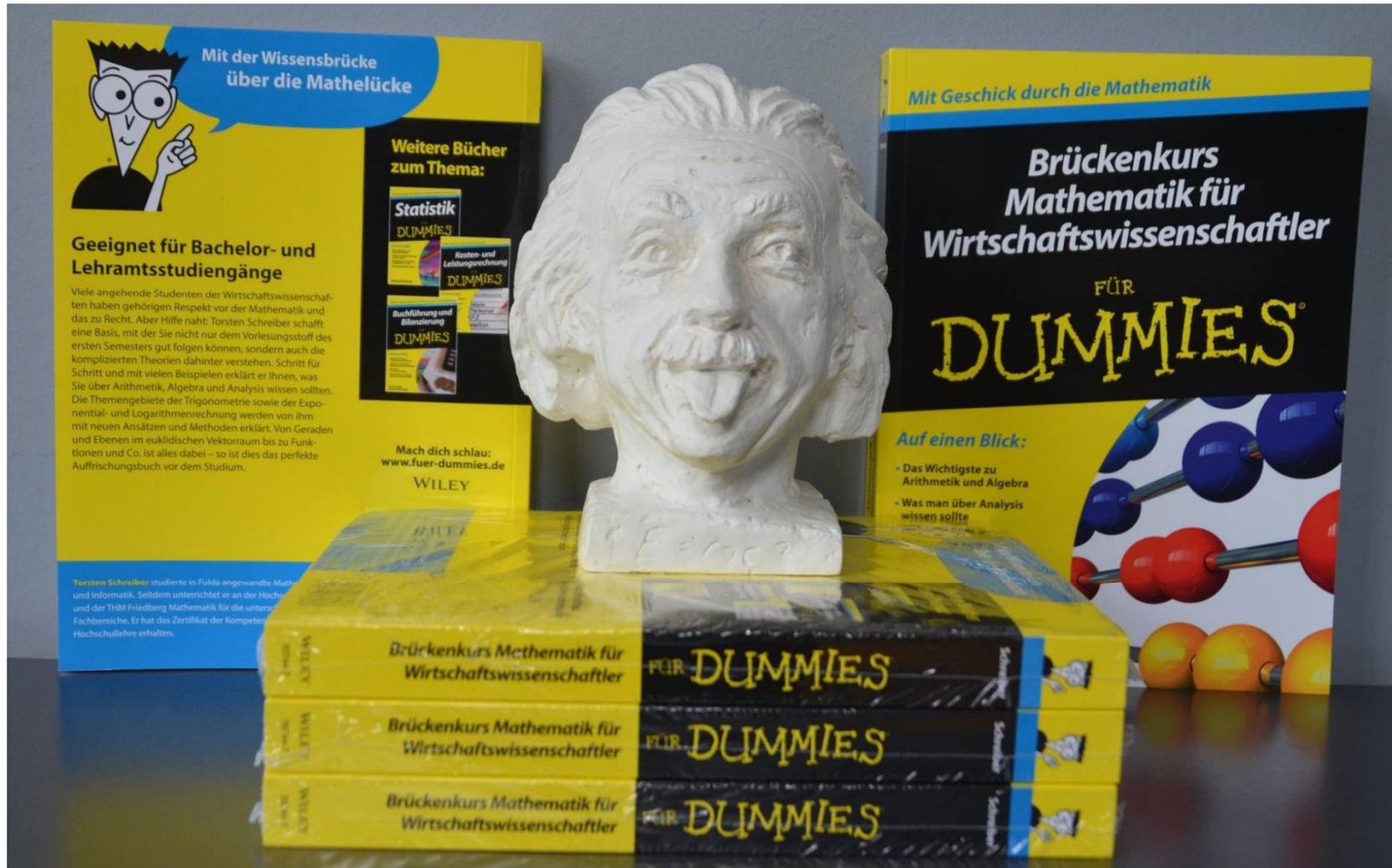
- WarmUp



- n-Sandwich



Mein Buch

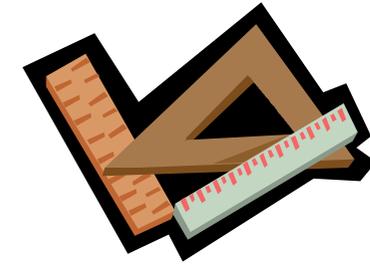


ISBN: 978-3527707447

Themengebiete des Vorkurses

1. **Mengen**
Grundlagen / Gesetze und Junktoren / Zahlenmengen
2. **Komplexe Zahlen**
Definition und grafische Darstellung / Grundrechenarten
3. **einfache Bruchrechnung**
Rechengesetze / Methodiken
4. **erweiterte Bruchrechnung**
leichte Gleichungen / Doppelbruch
5. **Rechnen mit Potenzen / Wurzeln**
ganz- und gebrochen rationaler Exponent
6. **Exponential- / Logarithmenrechnung**
Rechengesetze und graphische Darstellung
7. **Gleichung / Ungleichungen mit einer Unbekannten**
Rechnung und Grafik
8. **Gleichung / Ungleichungen mit 2 Unbekannten**
Additions-, Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren; grafische Lösung
9. **(Bi)-quadratische Gleichung**
quadratische Ergänzung, p-q-Formel, Satz von Vieta
10. **Lineare Gleichungssysteme**
Gauß'sche Eliminationsverfahren
11. **Trigonometrie am Einheitskreis und im allgemeinen Dreieck**
Funktionsgraph und Berechnungen (Additionstheoreme)
12. **Vektorrechnung**
Euklidischer Vektorraum / Lagerrelation von Geraden im R^3

Die Klausur



Theorie der schönen Zahlen

Taschenrechner brauchen wir nicht!

Bücher gehören in die Bibliothek – außer das von mir

Alles was ich geschrieben habe, darf ich auch nutzen.

1. **Mengenlehre (8 Punkte):**

Gegeben sind die Menge A der natürlichen Zahlen (größer 7 und kleiner gleich 22), die durch 2 oder 3 oder auch durch 5 teilbar sind und die Menge B der nicht durch zwei teilbare Zahlen im Intervall von]6; 24]. Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung und 2 mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$

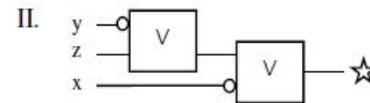
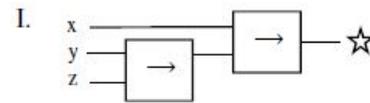
b) $A \cup B$

c) $A \setminus B$

d) $B \setminus A$

2. **Aussagenlogik (8 Punkte):**

Geben Sie für die folgenden beiden Schaltungen die zugehörigen Aussageformeln an und zeigen Sie, dass beide Ausdrücke äquivalent zueinander sind (Begründung).



3. **Bruchrechnung (8 Punkte):**

a) $\left[2\frac{1}{3} - 1,5 \cdot \left(3 - \frac{2}{x} \right) + \frac{7}{10} + \frac{3}{x} \cdot (0,5x - 1) \right] : \frac{1}{3}$

b) $\frac{\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4(a - 2b)^2}}{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 4ab + 4b^2}}$

4. **Komplexe Zahlen (8 Punkte):**

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Gleichungen und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form $z = a + bi$ an. Bestimmen Sie bei Aufgabe b) zusätzlich noch den Betrag und das Argument.

a) $z = \frac{5i \cdot (3 + 9i)}{(3i + 1)^2} - \frac{(4i - 3)^2}{(1 - 3i)}$

b) $z^2 - (6i - 4) \cdot z = 12i + 9$

5. **Arithmetik (8 Punkte):**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $-\left[\left(2x - \frac{1}{2}z \right)^4 - \left(\frac{1}{4}z^2 + 12x^2 \right)^2 \right] - 16x^3 \cdot (8x + z)$

b) $14 \cdot \left[x - \left(2y - 2 \cdot (x - (2z + 3y)) - 4 \cdot (2y + z) \right) \right]$

6. **Exponential-/Logarithmusrechnung (16 Punkte):**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend:

$$\text{a) } \frac{2 \cdot (27x^2y^3z^{-2})^3}{(8x^2y^{-5}z^3)^{-2}} \cdot \frac{3 \cdot (0,25xy^{-5}z^{-3})^{-3}}{(9^{-1}x^{-3}y^4z^2)^4} \qquad \text{b) } \frac{4n\sqrt[4]{a^{8n-3}}}{2n\sqrt[2]{a^{5n-2}}} \cdot \frac{n\sqrt[3]{(\sqrt{a})^{3n+2}}}{2n\sqrt[2]{a^{3+7n}}}$$

$$\text{c) } 4^{ld3} + \log 0,001 + 2 \cdot \sqrt[3]{e^{-ln8}} + \frac{1}{4} \cdot ld \frac{1}{256} - \left(\frac{1}{100}\right)^{\log 0,25} - 3 \cdot \ln \sqrt[3]{\frac{1}{e^8}}$$

$$\text{d) } 3 \cdot \log x - \log 2 + 3 \cdot (\log 2 - \log x^2) = 2 \cdot \log \frac{1}{4} + 4 \cdot (\log x + 0,5 \cdot \log \sqrt{2}) - 2 \cdot \log x^4$$

7. **Parabelfunktion (8 Punkte):**

Berechnen Sie den Scheitelpunkt, die Schnittpunkte mit beiden Achsen und beschreiben den Verlauf der Parabeln.

$$\text{a) } f(x) = -4x^2 + 8x + 32 \qquad \text{b) } g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5x + 18$$

8. **Ungleichungen (8 Punkte):**

Berechnen Sie den Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen.

$$\text{a) } 3 \cdot |8 - 2x| \leq 36 \qquad \text{b) } \frac{(x-2)^2}{x-8} > 6 + x$$

9. **Gleichungen mit einer Unbekannten (8 Punkte):**

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie – sofern erforderlich – den Definitionsbereich an.

$$\text{a) } x^5 \cdot (x^5 - 33) = -32 \qquad \text{b) } 2x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) + 8x^2 = 16 + 2x \cdot (x + 2)$$

10. **Lineare Gleichungssysteme (12 Punkte):**

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 0,5x + 5 = -6y \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} -x + 2y + 3z = 7 \\ x + 3y - 3z = -2 \\ 2x - y + 2z = 5 \end{cases} \qquad \text{c) } \begin{cases} 0,75x + y = 1 \\ 2x - 10 = y \end{cases}$$

beliebig

Gauß-Verfahren

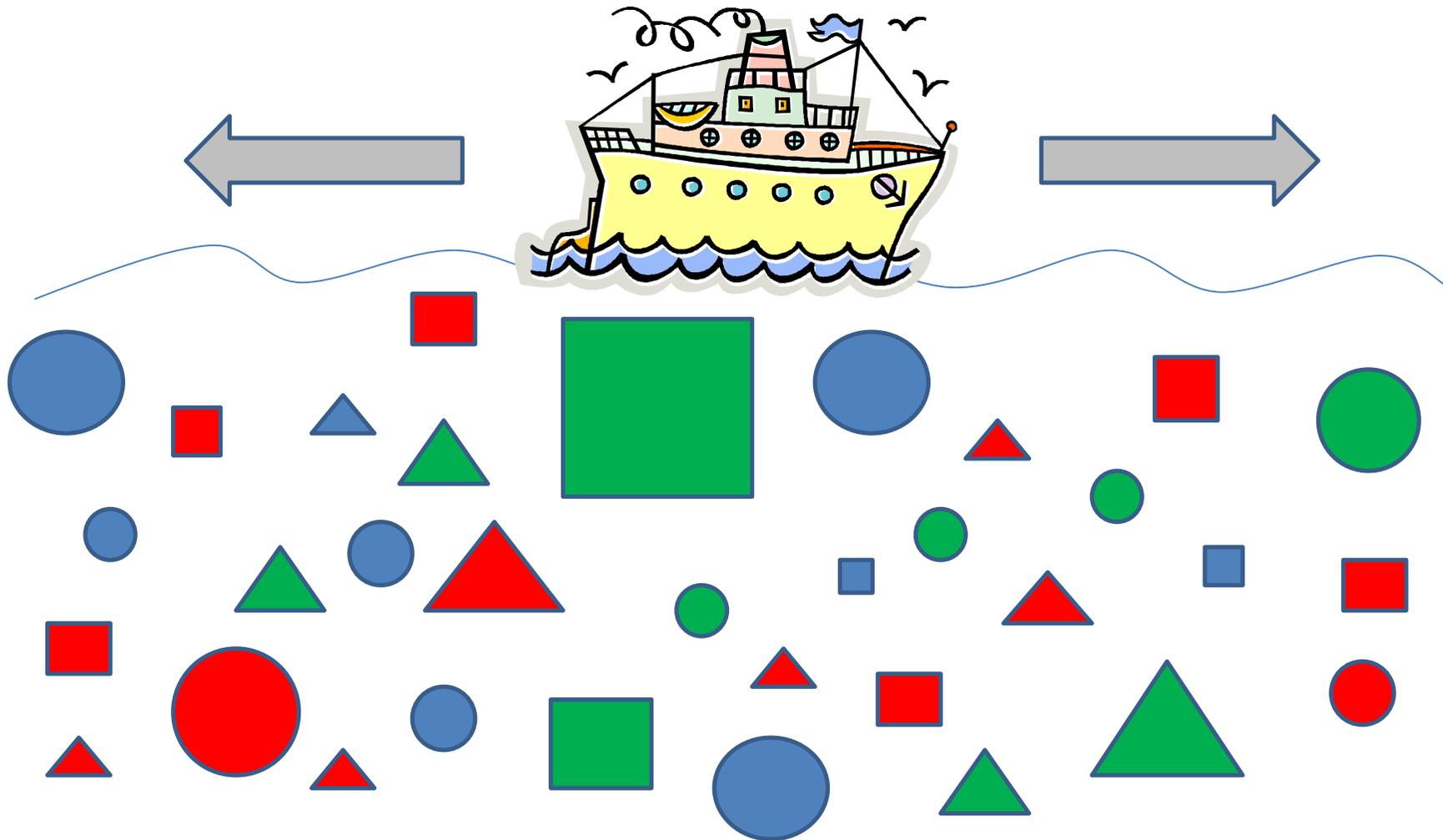
beliebig

11. **Trigonometrie (6 Punkte):**

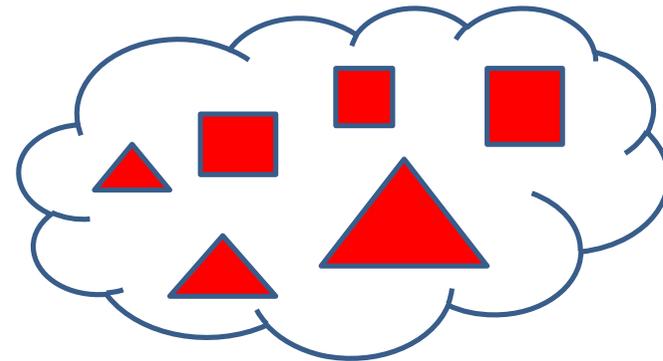
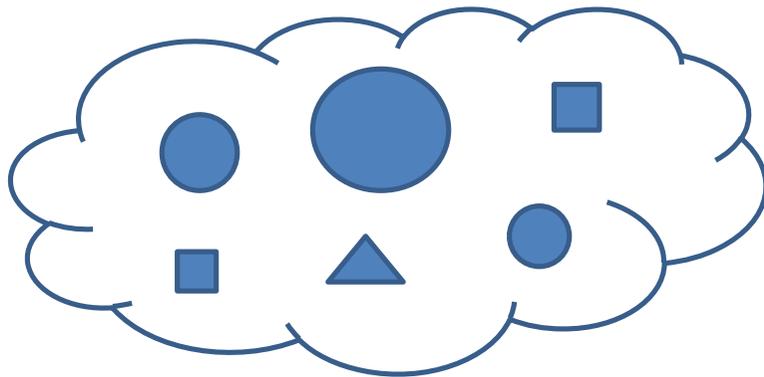
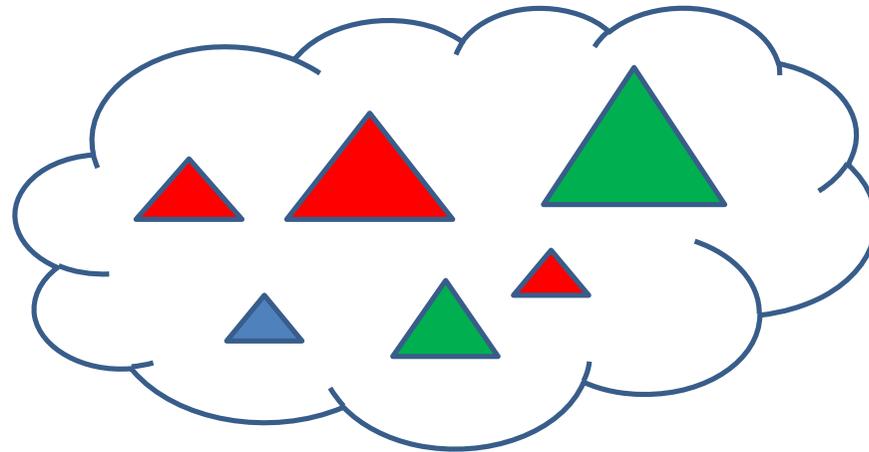
Gegeben sei die Funktion mit $f(x) = -2,5 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}x - 5,5\pi\right) + 3,5$.

Bestimmen und beweisen Sie die Periode, Symmetrie und Amplituden(Wertebereich) von $f(x)$.

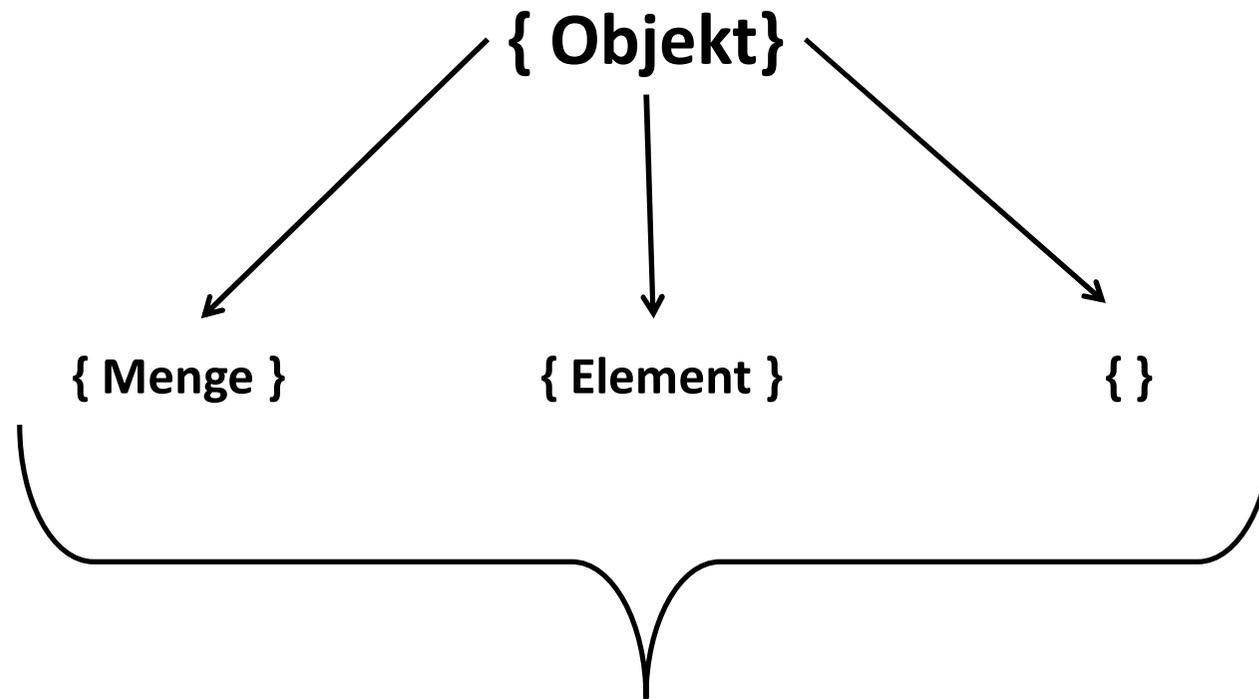
URKNALL DER MATHEMATIK



GRUPPEN VON MENGEN



MENGENDEFINITION



Reihenfolge spielt keine Rolle

Unterscheidbarkeit der Objekte (redundanzfrei)

OBJEKTFORMEN

Objekt	Beschreibung
$\{1,2\}$	
$(1;2)$	
$1,2$	
$\{\{1;2\}\}$	
$(1,2,1,2,1)$	
$\{(1;2)\}$	
$1;2$	
$[1;2[$	
$\{1,2; 1; \{2\}\}$	
$\{(1,1,1); (2,2,2)\}$	

OBJEKTFORMEN

Objekt	Beschreibung
$\{a, b\}$	
$(5; 8)$	
$-7,6$	
$\{\{8; 15; 21\}\}$	
$(4/-2,3/1,4)$	
$\{(-2; 4]\}$	
$3; 15$	
$[7; 7[$	
$\{-3,2; 3; \{32\}\}$	
$\{(5,6,7); (8,2,1)\}$	

OBJEKTFORMEN

Objekt	Beschreibung
$\{a, b\}$	Menge mit einem Objekt
$(5; 8)$	Tupel mit zwei Werten
$-7,6$	Element
$\{\{8; 15; 21\}\}$	Menge einer Menge mit 3 Objekten
$(4/-2,3/1,4)$	3-dimensionales Tupel
$\{(-2; 4]\}$	Menge eines halboffenen Intervalls
$3; 15$	2 Elemente
$[7; 7[$	Halboffenes Intervall bzw. leere Menge
$\{-3,2; 3; \{32\}\}$	Menge mit zwei Elementen und einer Menge
$\{(5,6,7); (8,2,1)\}$	Menge aus zwei 3-dimnensionalen Tupeln

DARSTELLUNGSFORMEN I

1) Aufzählung:

Die einzelnen Objekte werden innerhalb der Menge aufgeführt, wobei Platzhalter in Form von „...“ dargestellt werden.

2) Einschluss:

Basierend auf einer beliebigen Ausgangsmenge wird ein Gesetz definiert, das die enthaltenden Objekte beschreibt.

3) Ausschluss:

Aus einer Grundzahlenmenge werden die Objekte definiert, die nicht enthalten sein dürfen.

Beispiel:

Mengen der geraden, natürlichen Zahlen

1) $G_{\mathbb{N}} = \{2; 4; 6; 8; \dots\}$

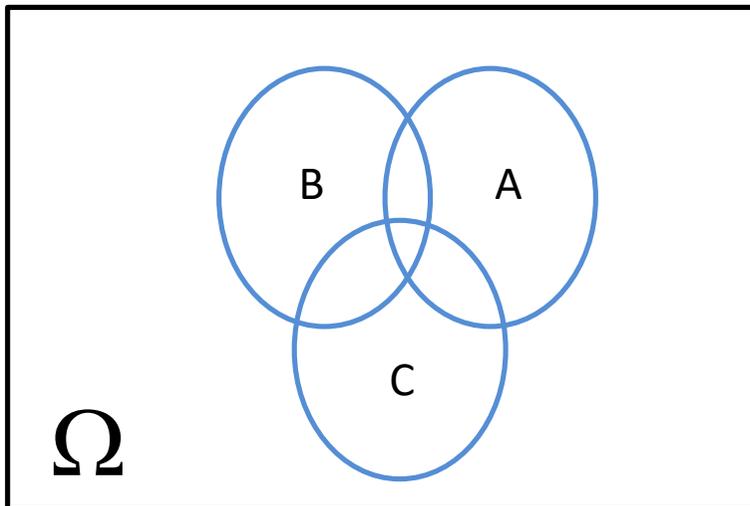
2) $G_{\mathbb{N}} = \{x \in \mathbb{N} | x \bmod 2 = 0\}$

3) $G_{\mathbb{N}} = x \in \mathbb{N} \setminus \{x \in \mathbb{N} | x \bmod 2 <> 0\}$

DARSTELLUNGSFORMEN II

4) Vennsches Diagramm:

Es werden die existierenden Mengen mittels Kreise in die Welt (Kasten) eingetragen.

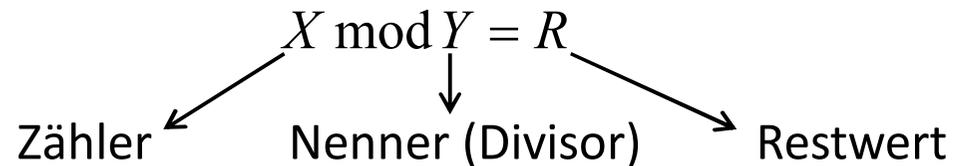


Die dadurch entstehenden Untermengen sind:

- Vereinigungsmenge (ODER-Verknüpfung)
- Schnittmenge (UND-Verknüpfung)

MODULO

Die Modulo-Funktion entspricht einem Restwertoperator, d.h. bei einer ganzzahligen Division wird der Rest als Ergebnis dargestellt.



Beispiel:

$$5 \bmod 2 = 1, \text{ denn } 5 \div 2 = 2 \text{ Rest } 1$$

$$23 \bmod 5 = 3, \text{ denn } 23 \div 5 = 4 \text{ Rest } 3$$

Teilbarkeit: Restwert muss 0 ergeben

$$x \bmod 7 = 0 \quad x \text{ ist teilbar durch } 7$$

$$x \bmod 2 \neq 0 \quad x \text{ ist nicht durch } 2 \text{ teilbar (ungerade Zahl)}$$

AUFGABEN

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

- 1) Beschreiben Sie alle nicht durch sieben teilbaren natürlichen Zahlen.
- 2) Definieren Sie alle ganze Zahlen größer -10 , die durch vier oder durch 5 teilbar sind.
- 3) Geben Sie alle positiven ganzen Zahlen kleiner gleich 100 an, die durch drei und durch fünf teilbar sind.
- 4) Nennen Sie alle natürlichen Zahlen zwischen 4 und 42, die nicht durch 2 und auch nicht durch 3 teilbar sind.
- 5) Welche ganzen Zahlen größer als 42 oder kleiner -10 sind durch 7 aber nicht durch 3 teilbar.

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Menge

Element

redundanzfrei

Modulo

Junktor

Intervall

Schnittmenge

Relation

Venn'sches
Diagramm

Einschluss

Vereinigungsmenge

Ausschluss

Tupel