Klausur zum Wintersemester 2011/12

Name: ______________________ Matrikel-Nr: ______________

EMail: ______________________ (optionale Schnell-Korrektur)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte	12	12	12	10	10	12	12	10	10

Als Hilfsmittel sind die von dem Lehrbeauftragten zur Verfügung gestellten sowie eigene Unterlagen zugelassen (Skripte und Musteraufgaben sowie deren Lösungen).
Bücher und elektronische Hilfsmittel sind nicht gestattet.

1. Gegeben sind die Menge A mit $A = \{-7; -6; -5; -4; -2; -1; 2; 3; 6; 7; 9; 12; 16\}$ und die Menge B der ganzen Zahlen (größer gleich -10 und kleiner gleich 10), die durch 3 oder durch 4 teilbar sind.
   Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

   a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \backslash B$ d) $B \backslash A$

2. Berechnen Sie die Lösungen der folgenden komplexen Gleichungen und geben Sie das Ergebnis in der kartesischen Form z=a+bi an.
   Bestimmen Sie bei Aufgabe b) zusätzlich noch den Betrag und das Argument.

   a) $z = \frac{5i \cdot (3+9i)}{(3i+1)^2} - \frac{(4i-3)^2}{(1-3i)}$ b) $z^2 - (6i-4) \cdot z = 12i + 9$

3. Vereinfachen Sie die folgenden Terme und fassen Sie das Ergebnis zusammen.

   a) $\sqrt[4n]{x^{2n-6}} \cdot \frac{\left(\sqrt{\sqrt[n]{x}}\right)^{6+3n}}{\sqrt[2n]{x^{2n+3}}}$ b) $\frac{32 \cdot \left(2x^3 y^{-2} z^{-4}\right)^{-3}}{0{,}5 \cdot \left(2z^2 x^{-3} y^2\right)^4} : \frac{8 \cdot \left(4x^{-2} z^{-1} y^3\right)^2}{16 \cdot \left(0{,}25 y^{-4} z^4 x^3\right)^{-2}}$

   c) $2 \cdot \log\sqrt{0{,}001} + 15 \cdot \ln\frac{1}{\sqrt[3]{e}} + 2 \cdot \left(1000^{\log 2} + 2 \cdot ld\,0{,}25\right) - e^{0{,}5\ln 9} + \left(\frac{1}{4}\right)^{ld\,0{,}5}$

4. Berechnen Sie die zugehörigen Lösungsmengen und geben den Definitionsbereich an.

   a) $\sqrt{3x-8} = \frac{x}{2}$ b) $x^2 \cdot \frac{x-7}{x-2} = 16 \cdot \frac{x+2}{x+7}$

5. Berechnen Sie den Lösungsbereich der folgenden Ungleichungen.

   a) $|3x-6| \leq 2x+1$ b) $\frac{10-2x}{2x-4} < 2$

6. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (Aufgabe a) auf 2 Arten).

   a) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{4-2x}{6-2 \cdot \sqrt{11-x}}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(x^2 \cdot e^{-x} - \sqrt{\left(1+\frac{8}{x}\right)^x}\right)$

7. Bestimmen Sie von der folgenden Funktion alle Extrem- und Wendepunkte und geben Sie deren Art an. Fertigen Sie eine grobe Skizze des Graphen an.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

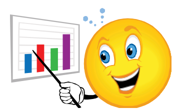
8. Wie müssen die beiden Parameter $a; b \in Z$ gewählt werden, damit die Funktion sowohl stetig als auch differenzierbar ist?

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx - 16; x \geq 2 \\ bx + 20; x < 2 \end{cases}$$

9. Berechnen Sie die zwischen den folgenden Parabeln liegende Fläche:

   $f(x) = x^2 - 10x + 20$ $g(x) = 4x - x^2 - 4$

Geschenke gibt es nicht nur zu Weihnachten und Ostern!!!!!



Musterlösung Klausur Mathematik 1 2011/ 12 (Fulda)

1) Menge A: $A = \{-7; -6; -5; -4; -2; -1; 2; 3; 6; 7; 9; 12; 16\}$
Menge B: $B = \{-9; -8; -6; -4; -3; 0; 3; 4; 6; 8; 9\}$

a) $A \cap B$: $\{-6; -4; 3; 6; 9\}$
b) $A \cup B$: $\{x \in Z \setminus \{1; 5; 10; 11; 13; 14; 15\} | x \geq -9 \land x \leq 16\}$
c) $A \setminus B$: $\{-7; -5; -2; -1; 2; 7; 12; 16\}$
d) $B \setminus A$: $\{x \in Z \setminus \{-6; -4; 3; 6\} | (x \geq -9 \land x \leq 8) \land (x mod 3 = 0 \lor x mod 4 = 0)\}$

2) a) $$z = \frac{5i \cdot (3+9i)}{(3i+1)^2} - \frac{(4i-3)^2}{(1-3i)} = \frac{5i \cdot 3 \cdot (1+3i)}{(1+3i)^2} - \frac{16i^2 - 24i + 9}{(1-3i)} = \frac{15i}{(1+3i)} - \frac{-24i-7}{(1-3i)}$$

$$z = \frac{15i \cdot (1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)} - \frac{(-24i-7)\cdot(1+3i)}{(1-3i)\cdot(1+3i)} = \frac{15i - 45i^2}{1-9i^2} - \frac{-24i - 7 - 72i^2 - 21i}{1-9i^2} = \frac{15i + 45 + 45i - 65}{10}$$

$$z = \frac{60}{10} i - \frac{20}{10} = 6i - 2$$

b) $$z^2 - (6i-4)\cdot z = 12i + 9 \Leftrightarrow z^2 - (6i-4)\cdot z - (12i+9) = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{6i-4}{2} \pm \sqrt{(3i-2)^2 + 12i + 9} = (3i-2) \pm \sqrt{(9i^2 - 12i + 4) + 12i + 9} = (3i-2) \pm \sqrt{4}$$

$z_1 = 3i - 4$ <u>Betrag</u>: $\Rightarrow z_1 : r = \sqrt{9+16} = 5$ <u>Argument</u>: $\Rightarrow z_1 : \alpha = \arctan(-0{,}75) + \pi$
$z_2 = 3i$ $\Rightarrow z_2 : r = \sqrt{9} = 3$ $\Rightarrow z_2 : \alpha = 0{,}5 \cdot \pi = 90°$

3) a) $$\sqrt[4n]{x^{2n-6}} \cdot \frac{\left(\sqrt{\sqrt[n]{x}}\right)^{6+3n}}{\sqrt[2n]{x^{2n+3}}} = x^{\frac{2n-6}{4n}} \cdot \frac{x^{\frac{6+3n}{2n}}}{x^{\frac{2n+3}{2n}}} = x^{\frac{n-3}{2n} + \frac{6+3n}{2n} - \frac{2n+3}{2n}} = x^{\frac{n-3+6+3n-2n-3}{2n}} = x^{\frac{2n}{2n}} = x$$

b) $$\frac{32 \cdot (2x^3 y^{-2} z^{-4})^{-3}}{0{,}5 \cdot (2z^2 x^{-3} y^2)^4} : \frac{8 \cdot (4x^{-2} z^{-1} y^3)^2}{16 \cdot (0{,}25 y^{-4} z^4 x^3)^{-2}} = \frac{2^5 \cdot (2^{-3} x^{-9} y^6 z^{12}) \cdot 2^4 \cdot (2^4 x^{-6} y^8 z^{-8})}{2^{-1} \cdot (2^4 x^{-12} y^8 z^8) \cdot 2^3 \cdot (2^4 x^{-4} y^6 z^{-2})} = \frac{2^{10} x^{-15} y^{14} z^4}{2^{10} x^{-16} y^{14} z^6} = \frac{x}{z^2}$$

c) $$2 \cdot \log \sqrt{0{,}001} + 15 \cdot \ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}} + 2 \cdot \left(1000^{\log 2} + 2 \cdot ld 0{,}25\right) - e^{0{,}5 \ln 9} + \left(\frac{1}{4}\right)^{ld 0{,}5}$$

$$2 \cdot \log 10^{-\frac{3}{2}} + 15 \cdot \ln e^{-\frac{1}{3}} + 2 \cdot \left(10^{3 \cdot \log 2} + 2 \cdot ld 2^{-2}\right) - e^{\ln \sqrt{9}} + 2^{-2 ld 0{,}5}$$

$$\log 10^{-3} + \ln e^{-5} + 2 \cdot \left(10^{\log 8} + ld 2^{-4}\right) - e^{\ln 3} + 2^{ld 4}$$

$$-3 - 5 + 2 \cdot (8 - 4) - 3 + 4 = 1$$

4) a) $\sqrt{3x-8}=\frac{x}{2}\rightarrow D=\left\{x\in R \mid x\geq\frac{8}{3}\right\}$

$$\sqrt{3x-8}=\frac{x}{2}\Rightarrow 3x-8=\frac{x^2}{4}\Leftrightarrow 12x-32=x^2 \Leftrightarrow x^2-12x+32=0\Leftrightarrow (x-4)\cdot(x-8)=0\Rightarrow L=\{4;8\}$$

b) $x^2\cdot\frac{x-7}{x-2}=16\cdot\frac{x+2}{x+7};D=R/\{-7;2\}$

$$x^2\cdot\frac{x-7}{x-2}=16\cdot\frac{x+2}{x+7}\Leftrightarrow x^2\cdot(x-7)\cdot(x+7)=16\cdot(x+2)\cdot(x-2)\Leftrightarrow x^2\cdot(x^2-49)=16\cdot(x^2-4)$$

$$x^4-49x^2=16x^2-64\Leftrightarrow x^4-65x^2+64=0\Leftrightarrow(x^2-64)\cdot(x^2-1)=0\Rightarrow L=\{-8;-1;1;8\}$$

5) a) $|3x-6|\leq 2x+1$

$x\geq 2$	$x<2$
$3x-6\leq 2x+1\Leftrightarrow x\leq 7$	$-(3x-6)\leq 2x+1\Leftrightarrow -3x+6\leq 2x+1\Leftrightarrow x\geq 1$
$x\geq 2\vee x\leq 7$	$x<2\wedge x\geq 1$
Probe: $x=3\Rightarrow\lvert 9-6\rvert\leq 6+1$	Probe: $x=1{,}5\Rightarrow\lvert 4{,}5-6\rvert\leq 3+1$

$$L=\{x\in R \mid x\geq 1\wedge x\leq 7\}$$

b) $\frac{10-2x}{2x-4}<2$

$x>2$	$x<2$
$10-2x<4x-8\Leftrightarrow x>3$	$10-2x>4x-8\Leftrightarrow x<3$
$x>3$	$x<2$
Probe: $x=4\Rightarrow\frac{10-8}{8-4}=\frac{2}{4}<2$	Probe: $x=0\Rightarrow\frac{10-0}{0-3}=-\frac{10}{3}<2$

$$L=\{x\in R \mid x>3\vee x<2\}$$

6) a) Erweiterung mit dem 3. Binom:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-2x}{6-2\cdot\sqrt{11-x}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-2x}{6-2\cdot\sqrt{11-x}}\cdot\frac{6+2\cdot\sqrt{11-x}}{6+2\cdot\sqrt{11-x}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(4-2x)\cdot(6+2\cdot\sqrt{11-x})}{36-4\cdot(11-x)}\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{(4-2x)\cdot(6+2\cdot\sqrt{11-x})}{-2\cdot(4-2x)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{6+2\cdot\sqrt{11-x}}{-2}\right)=\frac{12}{-2}=-6$$

L'Hospital:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{4-2x}{6-2\cdot\sqrt{11-x}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{-2}{\frac{-2}{2\sqrt{11-x}\cdot(-1)}}\right)=\frac{-2}{\frac{1}{3}}=-6$$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\cdot e^{-x}-\sqrt{\left(1+\frac{8}{x}\right)^x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\sqrt{\left(1+\frac{8}{x}\right)^x}\right)=\left[0-\left(e^8\right)^{\frac{1}{2}}\right]=-e^4$

7) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

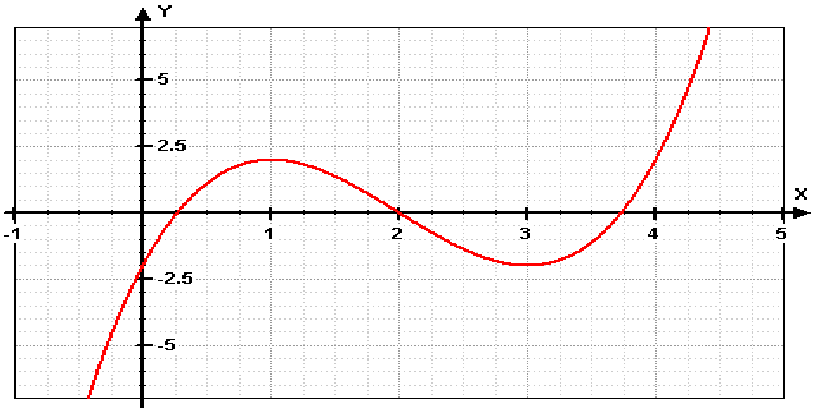
Wendepunkte: $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow WP(2/f(2)) = (2/0)$

Extrempunkte: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\cdot(x-1)\cdot(x-3) = 0$

$x = 1: f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow HP(1/f(1)) = (1/2)$

$x = 3: f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow TP(3/f(3)) = (3/-2)$

Skizze:



8) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx - 16; x \geq 2 \\ bx + 20; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax - b; x \geq 2 \\ b; x < 2 \end{cases}$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) \Rightarrow 4a - 2b - 16 = 2b + 20 \Leftrightarrow 4a - 4b = 36$

$\lim_{x \to 2^+} f'(x) = f'(2) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) \Rightarrow 4a - b = b \Leftrightarrow 4a = 2b \Leftrightarrow b = 2a$

$4a - 4\cdot(2a) = -4a = 36 \Leftrightarrow a = -9 \Rightarrow b = 2\cdot(-9) = -18$

9) $f(x) = x^2 - 10x + 20$ $\qquad g(x) = 4x - x^2 - 4$

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 10x + 20 = 4x - x^2 - 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 24 = 0 \Leftrightarrow 2\cdot(x^2 - 7x + 12) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot(x-3)\cdot(x-4) = 0$

$$\int_3^4 (f(x) - g(x))dx = \int_3^4 (2x^2 - 14x + 24)dx = 2\cdot\int_3^4 (x^2 - 7x + 12)dx = 2\cdot[F(4) - F(3)]$$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 12x \quad \begin{cases} F(4) = \frac{64}{3} - 56 + 48 = 13\frac{1}{3} \\ F(3) = 9 - \frac{63}{2} + 36 = 13\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_3^4 (2x^2 - 14x + 24)dx = 2\cdot|F(4) - F(3)| = 2\cdot\left|13\frac{1}{3} - 13\frac{1}{2}\right| = 2\cdot\left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{3}$$