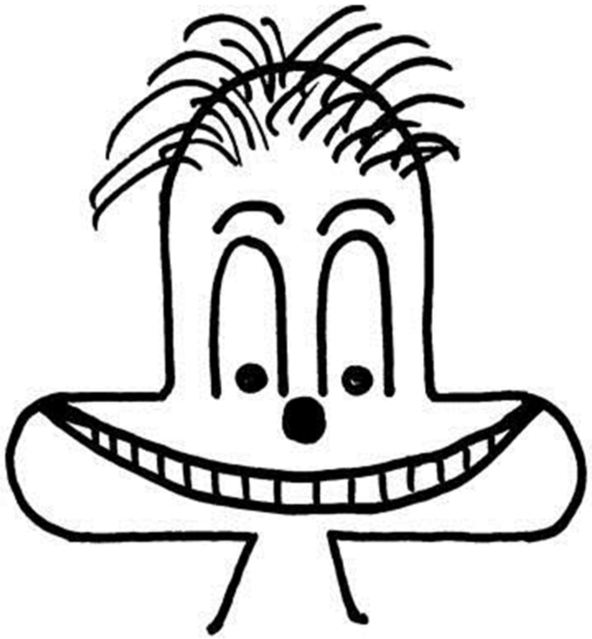
Mathe ist nicht nur begreifbar,

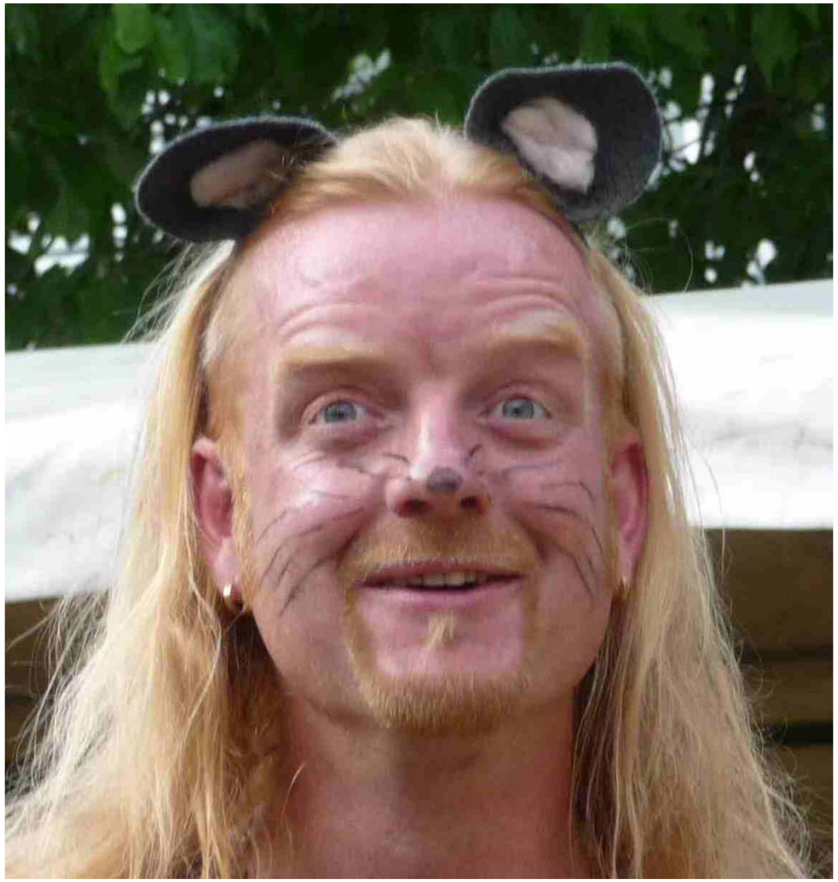


sondern macht sogar Spaß!

Mathematik-Training 2015

Torsten Schreiber

Mathematik ist begreifbar...



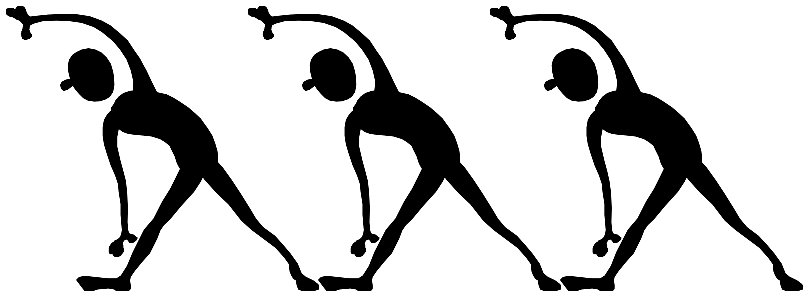
www.mathematik-guru.de

... und macht sogar Spaß!

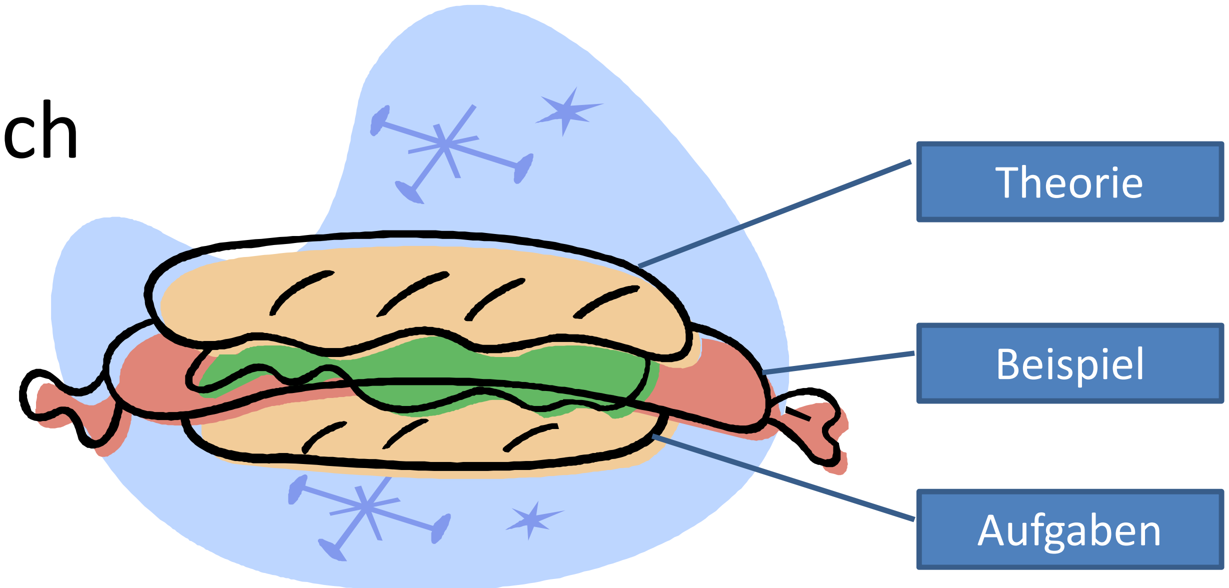
schreiber@mathematik-guru.de

Methodik meiner Veranstaltung

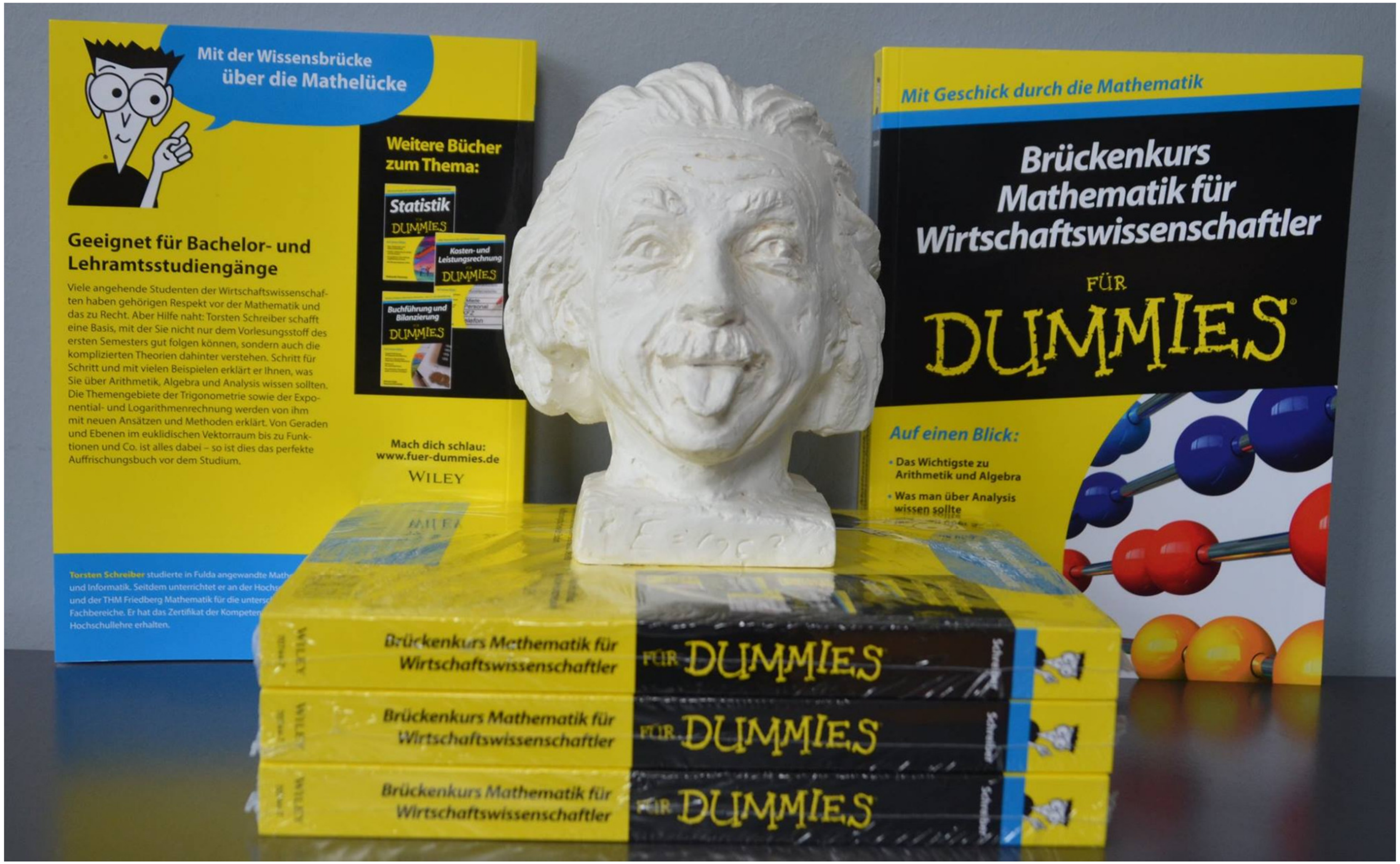
- WarmUp



- n-Sandwich



Mein Buch

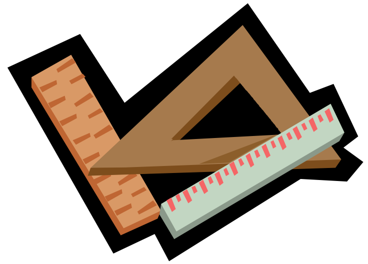


ISBN: 978-3527707447

Themengebiete des Kurses

1. **Mengen**
   Grundlagen / Gesetze und Junktoren
2. **Logik**
   Gesetze, Formalisierung und Wahrheitstabellen
3. **Arithmetik**
   Binomische Formeln und das Pascal'sche Dreieck
4. **einfache / erweiterte Bruchrechnung**
   Gesetze, Methodiken und Doppelbrüche
5. **Exponential-/ Potenzrechnung**
   ganz- und gebrochen rationale Exponenten
6. **Logarithmenrechnungen**
   Arten des Logarithmus, Gesetze und Graphen
7. **Gleichungen/ Ungleichungen mit einer Unbekannten**
   Rechnungsmethodik FREPL und Grafik
8. **Gleichungen/ Ungleichungen mit 2 Unbekannten**
   Additions-, Einsetzungs- und Gleichsetzungsverfahren, grafische Lösung
9. **Trigonometrie**
   Additionstheoreme, Funktionsgraphen und Einheitskreis
10. **Vektorrechnung**
    Geraden und Ebenengleichungen im R^3

Das Training



Theorie der schönen Zahlen

Taschenrechner brauchen wir nicht!

Bücher gehören in die Bibliothek – außer das von mir

Alles was ich geschrieben habe, darf ich auch nutzen.

Vorkursklausur 2013

Name: ______________________________
Mat.-Nr.: ____________________________
Email: ______________________________

1. **Mengenlehre (12 Punkte):**
Gegeben sind die Menge $A = \{1; 3; 4; 6; 7; 9; 10; 11; 12; 13; 16\}$ und die Menge B der natürlichen Zahlen (größer 1 und kleiner 18), die durch 2 oder durch 5 teilbar sind.
Bestimmen Sie die Lösungen (2-mal Aufzählung und 2-mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

2. **Aussagenlogik (8 Punkte):**
Gegeben sind die beiden Ausdrücke $A_1(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z)$ und $A_2(x,y,z) = (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge y)$
Ist die Subjunktion von A_2 auf A_1 allgemeingültig?
Erstellen Sie hierzu eine Wahrheitstabelle und begründen Sie Ihre Antwort.

3. **Bruchrechnung (8 Punkte):**

a) $2+\frac{1}{x}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4x}-\left(\frac{7}{12}+\frac{3}{4}\right)$ b) $\dfrac{\frac{3a}{b}-2+\frac{b}{3a}}{\frac{18a}{b}-\frac{2b}{a}}$

4. **Arithmetik (8 Punkte):**
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $\left(\frac{4}{x^2}\right)^2 \cdot \left(xy^2+0{,}5x\right)^4 - 8y^2 \cdot \left(1+3y^2+4y^4\right)$

b) $-6 \cdot (-3x - 2 \cdot (y - (4x + y - 3 \cdot (2x - y)) + z - x) - 2 \cdot (3y + z))$

5. **Exponential-/Logarithmusrechnung (20 Punkte):**
Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke weitestgehend (Aufgabe a - auseinanderziehen):

a) $\dfrac{9 \cdot \left(0{,}5 \cdot x^2 y^{-2} z\right)^4}{54 \cdot \left(4 \cdot x^{-2} y^3 z^{-2}\right)^{-3}} : \dfrac{36 \cdot \left(2 \cdot x^2 y^5 z^{-4}\right)^2}{16 \cdot \left(3 \cdot x^4 y^3 z^{-4}\right)^3}$

b) $4^{ld3} - \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{4\ln 0{,}25} + 4 \cdot \log\sqrt{1000} - \frac{1}{2} \cdot ld64 - 0{,}01^{\log 0{,}5} + 12\ln\sqrt[3]{e^2}$

c) $\dfrac{\sqrt[2n]{a^{3n+7}}}{\sqrt{\sqrt[n]{a^{5-2n}}}} \cdot \left(\sqrt[4n]{a^2}\right)^{5n-2}$

d) $3\log x - 2\log\frac{2}{x} - 3\log 4 + 4\log\sqrt{x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\log x^4 - \frac{1}{2}\log 256\right) - \frac{1}{3}\log\frac{1}{8}$

6. **Parabelfunktion (8 Punkte):**
Berechnen Sie den Scheitelpunkt, die Schnittpunkte mit beiden Achsen und beschreiben den Verlauf der Parabeln.

a) $f(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 16$ b) $f(x) = 3 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 81$

7. **Gleichungen mit einer Unbekannten (8 Punkte):**
Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie – sofern erforderlich – den Definitionsbereich an.

a) $\frac{36x - 108}{x - 3} = x^3 + 3x^2 - 16x - 12$ b) $x^3 + 5x = 6 \cdot \left(x^2 - 2\right)$

8. **Lineare Gleichungssysteme (12 Punkte):**
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left| \begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ 2y + 4 = x \end{array} \right|$ graphisch

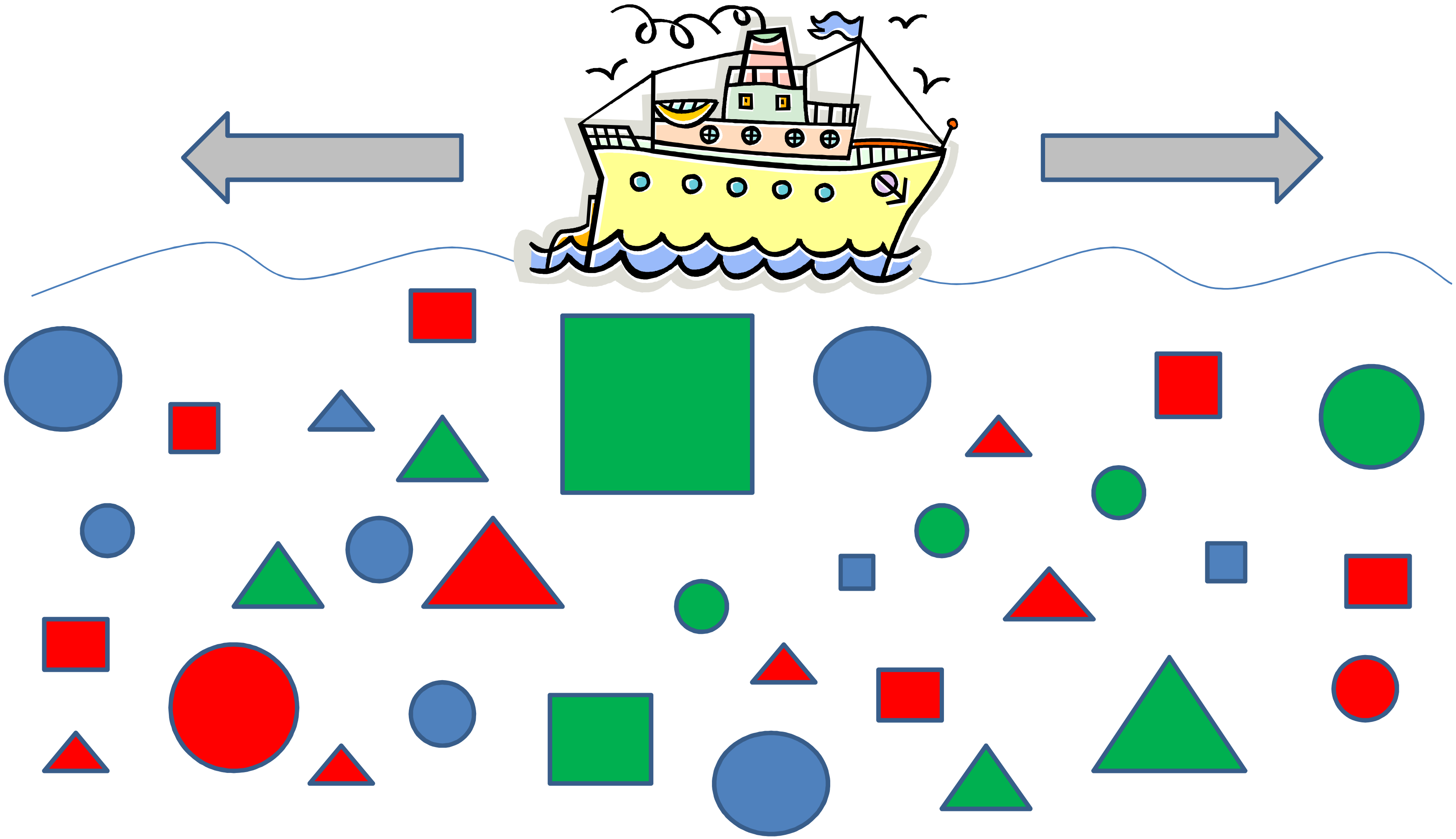
b) $\left| \begin{array}{l} -x + 2y - z = -5 \\ x - 3y + 2z = 8 \\ 2x - y + 5z = 13 \end{array} \right|$ Gauß-Verfahren

c) $\left| \begin{array}{l} \frac{2}{5}x - 4y = -4 \\ 6x - 24y = 12 \end{array} \right|$ beliebig

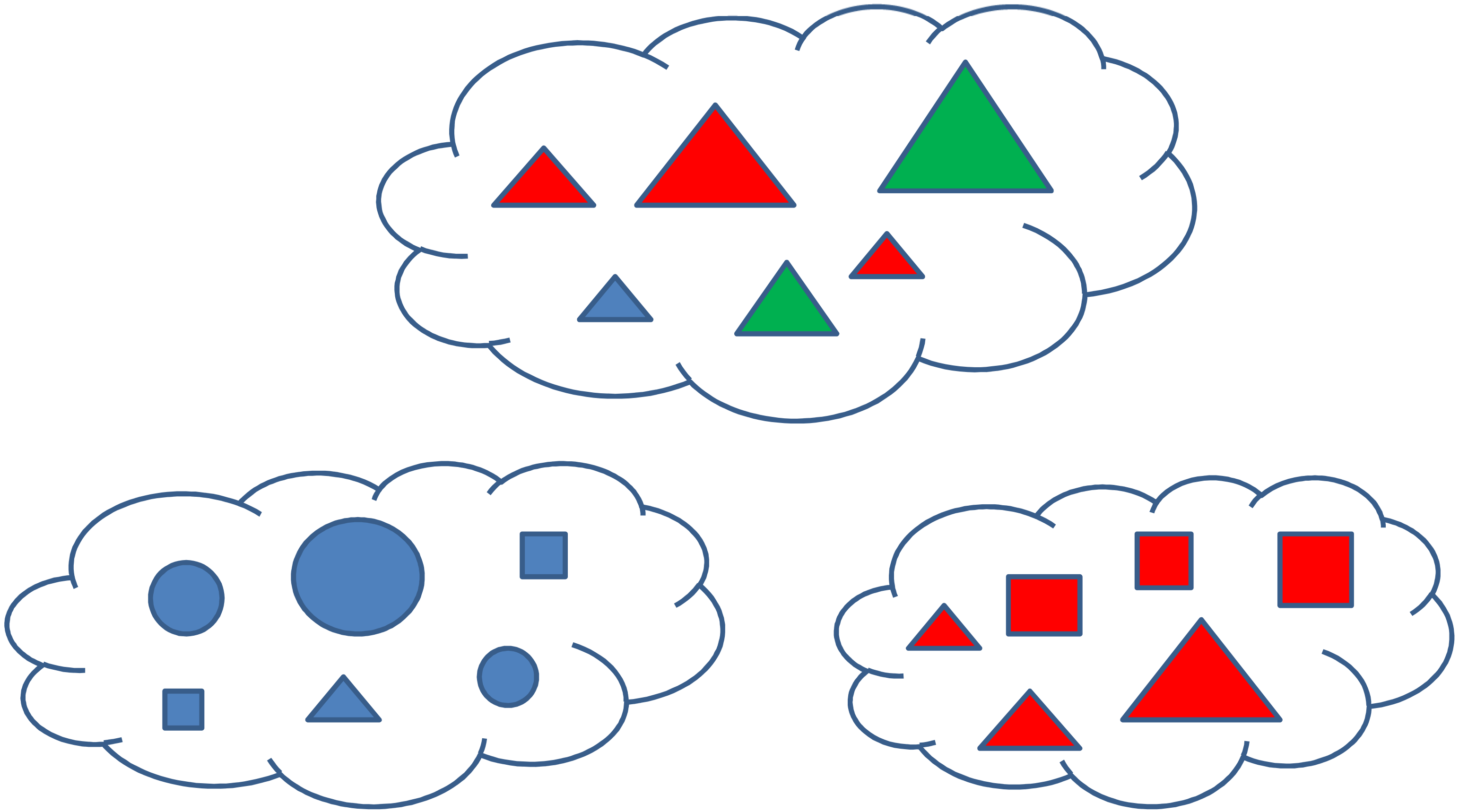
9. **Vektoren (8 Punkte):**
Bestimmen Sie die Geradengleichungen durch die gegebenen Punkte und bestimmen anschließend die Lage der beiden Geraden zueinander.
$\vec{a} = (-1;4;-7)^T, \vec{b} = (2;-5;8)^T$ $\vec{c} = (1;-1;1)^T, \vec{d} = (3;-5;7)^T$

10. **Trigonometrie (8 Punkte):**
Gegeben sei die Funktion mit $f(x) = 3 \cdot \sin\left(0{,}25x - 9{,}5\pi\right) - 5$.
Bestimmen und beweisen Sie die Periode, Symmetrie und Amplituden(Wertebereich) von $f(x)$.

URKNALL DER MATHEMATIK



GRUPPEN VON MENGEN



MENGENDEFINITION

{ Objekt}

{ Menge } **{ Element }** **{ }**

Reihenfolge spielt keine Rolle

Unterscheidbarkeit der Objekte (redundanzfrei)

OBJEKTFORMEN

Objekt	Beschreibung
$\{1,2\}$	
$(1;2)$	
$1,2$	
$\{\{1;2\}\}$	
$(1,2,1,2,1)$	
$\{(1;2)\}$	
$1;2$	
$[1;2[$	
$\{1,2;1;\{2\}\}$	
$\{(1,1,1);(2,2,2)\}$	

DARSTELLUNGSFORMEN I

1) <u>Aufzählung</u>:
   Die einzelnen Objekte werden innerhalb der Menge aufgeführt, wobei Platzhalter in Form von „...“ dargestellt werden.

2) <u>Einschluss</u>:
   Basierend auf einer beliebigen Ausgangsmenge wird ein Gesetz definiert, das die enthaltenden Objekte beschreibt.

3) <u>Ausschluss</u>:
   Aus einer Grundzahlenmenge werden die Objekte definiert, die nicht enthalten sein dürfen.

<u>Beispiel</u>: *Mengen der geraden, natürlichen Zahlen*

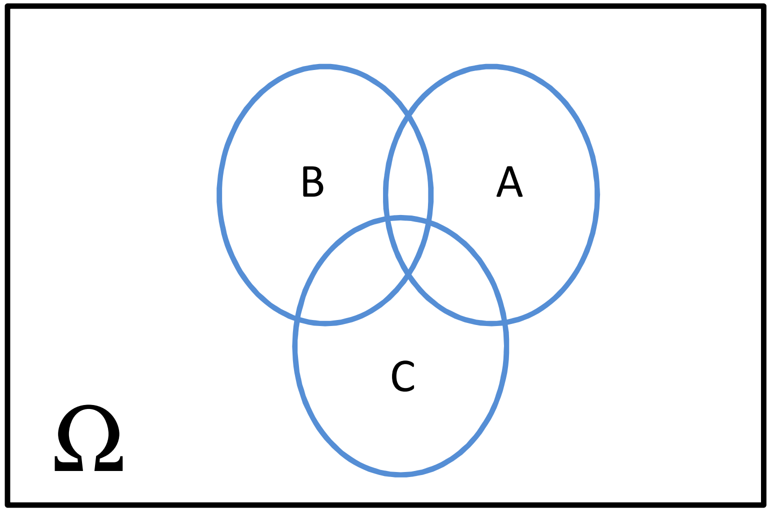
$$1)G_{\mathrm{N}} = \{2;4;6;8;...\}$$

$$2)G_{\mathrm{N}} = \{x \in \mathrm{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$$

$$3)G_{\mathrm{N}} = x \in \mathrm{N} \setminus \{x \in \mathrm{N} \mid x \bmod 2 <> 0\}$$

DARSTELLUNGSFORMEN II

4) <u>Vennsches Diagramm</u>:
Es werden die existierenden Mengen mittels Kreise in die Welt (Kasten) eingetragen.



Die dadurch entstehenden Untermengen sind:

- ➢ Vereinigungsmenge (ODER-Verknüpfung)
- ➢ Schnittmenge (UND-Verknüpfung)

MODULO

Die Modulo-Funktion entspricht einem Restwertoperator, d.h. bei einer ganzzahligen Division wird der Rest als Ergebnis dargestellt.

$$X \bmod Y = R$$

Zähler Nenner (Divisor) Restwert

<u>Beispiel</u>:

$5 \bmod 2 = 1$, denn $5 \div 2 = 2$ Rest 1

$23 \bmod 5 = 3$, denn $23 \div 5 = 4$ Rest 3

<u>Teilbarkeit</u>: Restwert muss 0 ergeben

$x \bmod 7 = 0$ x ist teilbar durch 7

$x \bmod 2 <> 0$ x ist nicht durch 2 teilbar (ungerade Zahl)

AUFGABEN

Lösen Sie die folgenden Übungen, in dem Sie je einmal die Mengen via Aufzählung und einmal mittels Eigenschaften definieren.

1) Beschreiben Sie alle durch drei teilbaren Zahlen.

2) Definieren Sie alle Zahlen, die durch vier oder durch 5 teilbar sind.

3) Geben Sie alle Zahlen an, die nicht durch drei teilbar sind.

4) Nennen Sie alle Zahlen zwischen 4 und 42, die weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind.

5) Welche Zahlen größer als 42 sind durch 7 aber nicht durch 3 teilbar.

TEILMENGE / INKLUSION

Sofern die Ausgangsmenge ein Teil oder komplett innerhalb einer weiteren Menge vorhanden ist, so spricht man von einer Teilmengenbeziehung bzw. von einer Inklusion.

Methodik:

1) Streichen der Mengenklammer bei der Ausgangsmenge

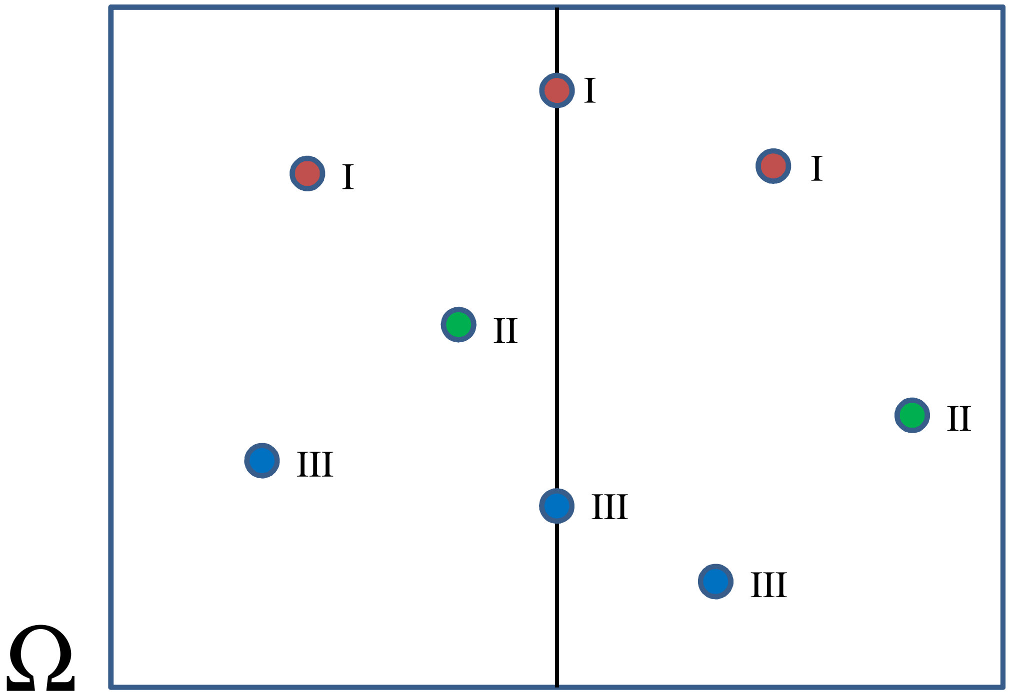
2) Jedes Objekt muss bzgl. Wert und Format in der 2. Menge auftauchen

$$\{a\} \subset Alphabet$$
$$\Downarrow$$
$$a \in Alphabet$$

Eigenschaften:

- ✓Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge $\{\ \} \subset A$
- ✓**reflexiv:** Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst $A \subset A$
- ✓**transitiv:** logische Schlussfolgerungen sind zugelassen $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- ✓**antisymmentrie:** Beweisprinzip der Extensionalität $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$

SYMMETRIE-EIGENSCHAFTEN



✓**Symmetrie (I):**
Zu jedem Punkt gehört ein Spiegelpunkt.

✓**Asymmetrie (I I):**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt.

✓**Antisymmetrie (I I I):**
Zu keinem Punkt existiert ein Spiegelpunkt aber mindestens ein Punkt auf der Spiegelachse.

Sind mehrere Symmetrievarianten vorhanden, so kann keinerlei Aussage über das Symmetrieverhalten getroffen werden.

JUNKTOREN

Junktoren entsprechen Verbindungen / Operatoren die beliebige Objekte miteinander verknüpfen können (Artithmetik: „+“, „-“, „*“, „:“).

UND $(A \cap B)$:
Das Objekt der Lösung gehört gleichzeitig zu den Menge A und B. (*Durchschnitt*)
Beispiel: Primzahl $\cap$ gerade, natürliche Zahl $=\{2\}$

ODER $(A \cup B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A oder B oder zu A und B. (*Vereinigung*)
Beispiel: ungerade Zahl $\cup$ gerade, natürliche Zahl = $\mathbb{N}$

NICHT $(A \setminus B)$:
Das Objekt der Lösung gehört zur Menge A aber nicht zu B. (*Differenz*)
Beispiel: natürliche Zahl $\setminus$ gerade, natürliche Zahl = ungerade Zahl

AUFGABEN

1) Gegeben sind die folgenden Mengen: $A = \{2;4;6;8;10\}$ $B = \{1;2;3\}$ $C = \{2;3;5;7;\}$
Berechnen Sie: $A \cup (B \cup C)$ $B \cap C \setminus A$ $(A \cap B) \cap (C \cap A)$ $A \setminus (B \cup C)$

2) Über die Anzahl *n* der Elemente in der Untermenge A, B und C einer Menge mit 200 Elementen ist folgendes bekannt:
$n(A) = 70$ $n(B) = 120$ $n(C) = 90$ $n(A \cap B) = 50$ $n(A \cap C) = 30$ $n(B \cap C) = 40$
$n(A \cap B \cap C) = 20$
Wie groß ist die Anzahl der Elemente in den folgenden Mengen?
$n(A \cup B)$ $n(A \cup B \cup C)$ $n(\overline{A} \cap B \cap C)$ $n(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

3) Gegeben sind die Mengen der durch 5 teilbaren, ganzen Zahlen A und die Menge B mit {-10, -9, -8…8, 9, 10}. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Aussagen als Aufzählung und unter Verwendung der Eigenschaften bzgl. der ganzen Zahlenmenge:
a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

4) Gegeben sind die Menge $A = \{x \in \Re \mid 42 \leq x < 50\}$ und die Menge B der durch 7 teilbaren natürlichen Zahlen (kleiner 45). Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):
a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

ZAHLENMENGEN

$N \rightarrow$	Natürliche Zahlen	$\{1;2;3...\}$
$Z \rightarrow$	Ganze Zahlen	$\{...-2;-1;0;1;2...\}$
$Q \rightarrow$	Rationale Zahlen	$\frac{a}{b}; a \in Z \wedge b \in Z \setminus \{0\}$ *Endliche Nachkommastellen, Periode*
$R \rightarrow$	Reelle Zahlen	$\{\pi; e; \sqrt{2}; ...\}$ *Unendliche Nachkommastellen*
$C \rightarrow$	Komplexe Zahlen	$z = a + b \cdot i \wedge i = \sqrt{-1}$

GESETZE / ZUSAMMENHÄNGE

Kommutativgesetz:	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetz:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Distributivgesetz:	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan:	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Komplement:	$\overline{A} \cap A = \{\ \}$	$\overline{A} \cup A = \Omega$
Absorption:	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

Zusammenhänge zwischen $A; \{\ \}; \Omega$

$\cap$: $\quad A \cap A = A \qquad A \cap \Omega = A \qquad A \cap \{\ \} = \{\ \}$

$\cup$: $\quad A \cup A = A \qquad A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cup \{\ \} = A$

Neutrales Objekt: $\quad A \cap \Omega = A \qquad A \cup \{\ \} = A$

AUFGABEN

Beweisen Sie die folgenden Ausdrücke unter Benennung aller angewandten Gesetze

1) Das Absorptionsgesetz $A \cap (A \cup B) = A$

2) Das De Morgangesetz $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ mittels Komplement

3) Vereinfachen Sie die Robbinsgleichung: $\overline{\overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup \overline{B}}}$

1. <u>Mengenlehre (12 Punkte):</u>

Gegeben sind die Menge A mit $A = \{8;10;12;14;16;20;22;26;28;30\}$ und die Menge B der natürlichen Zahlen (größer 2 und kleiner gleich 30), die durch 2 und gleichzeitig durch 3 teilbar sind.

Bestimmen Sie die Lösungen (2 mal Aufzählung <u>und</u> 2 mal Eigenschaften):

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) A\B d) B\A

KLASSENEINTEILUNG / ZERLEGUNG

Man spricht von einer Klasseneinteilung, sofern sicher gestellt werden kann, dass jedem Objekt aus der definierten Welt einer Klasse (Untermenge) zugeordnet werden kann.

UND-Verknüpfung:
Die UND-Verbindung zwischen jeder Klasse muss jeweils die leer Menge als Lösung haben. Man spricht dann von disjunkten Mengen.

ODER-Verknüpfung:
Die ODER-Verbindung zwischen allen Klassen muss zu einer Menge führen, die alle Objekte der definierten Ausgangsmenge enthält.

Beispiel:	*Alphabet*
UND-Verknüpfung:	$Konsonat \cap Vokal = \{\ \}$
ODER-Verknüpfung:	$Konsonat \cup Vokal = Alphabet$

POTENZMENGE

Eine Potenzmenge ist eine Ansammlung von allen möglichen Teilmenge basierend auf einer beliebigen Menge A.

Da jedes Objekt der Ausgangsmenge zwei Möglichkeiten besitzt, nämlich zu der Teilmenge zu gehören oder nicht, besteht jede Potenzmenge aus 2^n Untermengen.

Die Teilmengen existieren von der Länge Null (leere Menge) bis zu der Länge *n* (Anzahl der Objekte in der Ausgangsmenge).

<u>Beispiel:</u> $A = \{a; b; c; d\}$

$$P(A) = \left\{ \begin{matrix} \{\ \}; \\ \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{d\}; \\ \{a;b\}; \{a;c\}; \{a;d\}; \{b;c\}; \{b;d\}; \{c;d\}; \\ \{a;b;c\}; \{a;b;d\}; \{a;c;d\}; \{b;c;d\}; \\ \{a;b;c;d\} \end{matrix} \right\} \quad 2^n = 2^4 = 16 \quad \text{Untermengen}$$

KARTESISCHES PRODUKT

Das kartesische Produkt wird mittels Kreuzprodukt aus beliebigen Mengen gebildet, wobei jedes Objekt der linken Menge mit jedem weitern Objekt übrigen Mengen kombiniert wird.

Als Ergebnis entsteht ein n-dimensionales Tupel $X = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Die entstehende geordnete Punktmenge ist **nicht kommutativ**.

Der Euklidische Vektorraum lässt sich als kartesische Produkt somit wie folgt darstellen: $\Re^3 = \Re x \Re x \Re = (x_1, x_2, x_3)$

Beispiel: $A = \{a; b; c\}$ $B = \{1;2;\}$

$$AxB = \{(a,1);(a,2);(b,1);(b,2);(c,1);(c,2);\}$$

$$BxA = \{(1,a);(1,b);(1,c);(2,a);(2,b);(2,c);\}$$

AUFGABEN

1) Gegeben sei die Menge $A = \{42; \{x; y\}, \{\ \}\}$.
   Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) x \in A$ $\quad b) \{x; y\} \subset A$ $\quad c) \{42\} \subset A$ $\quad d) \{42\} \in A$ $\quad e) 42 \in A$

   $f) 42 \subset A$ $\quad g) \{\ \} \in A$ $\quad h) \{\ \} \subset A$ $\quad i) \{\{\ \}\} \subset A$ $\quad j) \{4\} \subset A$

2) Welche der folgenden Aussagen über eine Potenzmenge $P(A)$ und einer Menge *A* sind wahr bzw. falsch (Begründung)?

   $a) A \in P(A)$ $\quad b) A \subset P(A)$ $\quad c) \{\ \} \in P(A)$ $\quad d) \{\ \} \subset P(A)$

   $e) \{A\} \in P(A)$ $\quad f) \{A\} \subset P(A)$ $\quad g) \{\{\ \}\} \subset P(A)$ $\quad h) \{\{\ \}\} \in P(A)$

3) Bilden Sie die Potenzmenge basierend auf der Menge $A = \{\otimes; \nabla; \infty; \pi\}$.

AUFGABEN

4) Gegeben sei die Menge $A = \{\{\ \}; a; \{1;3\}; 5; \{5\}\}$.
   Welche der folgenden Untermengen sind Zerlegungen von *A* (Begründung)?

   $a)\{\{a\};\{1;3\};\{\{\ \}\};\{5\}\}$ $b)\{\{a\};\{1;3\};\{\ \};\{5;\{5\}\}\}$ $c)\{\{a;\{1;3\}\};\{\{\ \}\};\{5;\{5\}\}\}$

   $d)\{\{a\};\{\{1;3\}\};\{\{\ \}\};\{\{5\}\};\{5\}\}$ $e)\{\{5;a;\{1;3\}\};\{\{\ \}\};\{5\}\}$

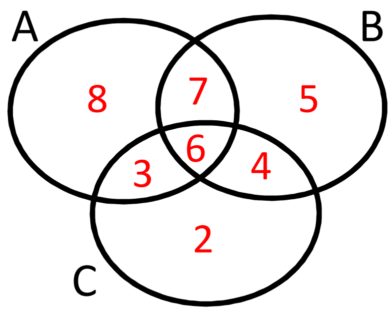
5) Gegeben sei die Menge $A = \{\alpha;\beta;\varepsilon\}$, $B = \{I;V\}$ und die Menge $C = \{x;y\}$.
   a) Bilden Sie das kartesische Produkt AxBxC.
   b) Bilden Sie das Kreuzprodukt aus AxB sowie aus CxA (grafische Darstellung).

6) Ermitteln Sie die gefragten Lösungsmengen aufgrund des gegebenen Venn'schen Diagramms.

   $a)A \cup C$ $d)(A \cup B) \setminus C$

   $b)A \setminus (B \cup C)$ $e)(A \cap B) \setminus (A \cup C)$

   $c)(A \cap C) \cup (B \cap C)$ $f)(C \cup A) \cap (B \cup C)$



Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wiederholung

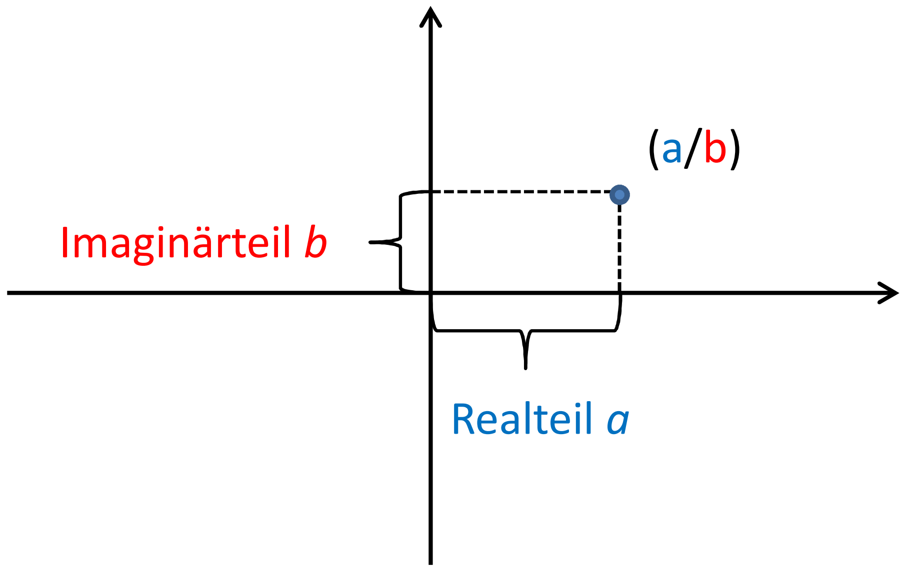
Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Welche Objekte können in einer Menge vorhanden sein?
- ✓ Was für Gesetze gelten bzgl. einer Menge?
- ✓ Wie können Sie Mengen darstellen?
- ✓ Was ist ein Tupel?
- ✓ Wie ist die Eigenschaftdefinition einer Menge aufgebaut?
- ✓ Wie beschreibt man die Teilbarkeit von Zahlen?
- ✓ Wie sind die Zahlenmengen der Arithmetik definiert?
- ✓ Was verstehen wir unter der Inklusion und wie funktioniert sie?
- ✓ Welche 4 wichtigen Eigenschaften besitzt die Teilmenge?
- ✓ Was gibt es für verschiedene Symmetrien?
- ✓ Welche Gesetze gibt es in der Mengenlehre / Arithmetik?

KOMPLEXE ZAHLEN I

$$z = a + b \cdot i; i = \sqrt{-1}$$

Realteil Imaginärteil



$$i^{0+4\cdot n} = 1 \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 0$$

$$i^{1+4\cdot n} = i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 1$$

$$i^{2+4\cdot n} = (-1) \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 2$$

$$i^{3+4\cdot n} = (-1)\cdot i \qquad \Rightarrow EXP \bmod 4 = 3$$

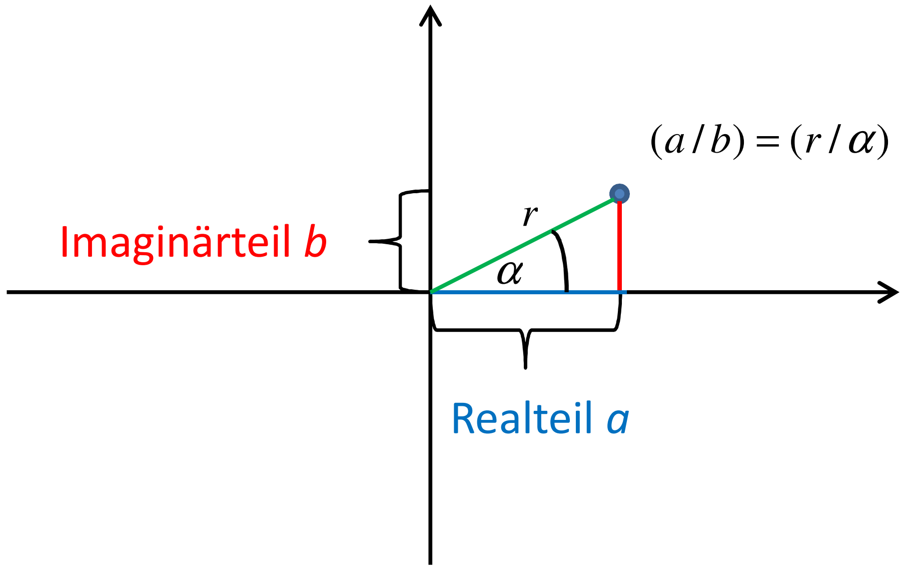
<u>Beispiel:</u>

$$(3+2i)+(7-5i) = (3+7)+(2-5)i = 10-3i$$

$$(3+2i)\cdot(7-5i) = (3\cdot 7)+(3\cdot(-5i))+(2i\cdot 7)+(2i\cdot(-5i)) = 21-15i+14i-10i^2 = 31-i$$

$$2i^3\cdot(3+2i)^2 = -2i\cdot(9+12i+4i^2) = -2i\cdot(5+12i) = 24-10i$$

KOMPLEXE ZAHLEN II



a = Ankathete

b = Gegenkathete

r = Hypotenuse

Betrag: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument: $\alpha = \arctan \frac{b}{a} + x \quad \begin{cases} a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow x = 0\pi \\ a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow x = 2\pi \\ a < 0 \wedge b > 0 \Rightarrow x = \pi \\ a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow x = \pi \end{cases}$

KOMPLEXE ZAHLEN III

Darstellung einer komplexen Zahl:

✓<u>Kartesische Darstellung:</u> $z = a + b \cdot i$

✓<u>Trigonometrische Darstellung:</u> $z = r \cdot \left(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\right)$

✓<u>Exponentielle Darstellung:</u> $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Beispiel: $z = 3 - 4 \cdot i$

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha &= \arctan\left(-\frac{4}{3}\right) + 360 \approx 307° \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z &= 5 \cdot \left(\cos(307) + i \cdot \sin(307)\right) \\ z &= 5 \cdot e^{i \cdot 307} \end{aligned}$$

KOMPLEXE ZAHLEN IV

Die konjugiert komplexe Zahl:

Um den Imaginärteil einer komplexen Zahl zu beseitigen , wird mittels des 3. Binoms der Ausdruck erweitert (konjugiert komplexen Zahl).

$$z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$$

Betrag: $z = 2 - 5i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 5i$

$$r = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(2 - 5i) \cdot (2 + 5i)} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$$

Division: $\dfrac{9 - 2i}{3 + i} \cdot \dfrac{3 - i}{3 - i} = \dfrac{27 - 6i - 9i + 2i^2}{3^2 - i^2} = \dfrac{25 - 15i}{10} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} i = 2{,}5 - 1{,}5i$

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Terme und geben Sie die Lösung mittels kartesischer Form an. Bestimmen Sie zusätzlich den Betrag und das Argument.

$$1)\left(1-2i\right)^3 \cdot \left[\left(3-i\right)\cdot\left(2i+6\right)\cdot i\right]$$

$$2)\frac{3+2i}{4-i}+\frac{-12-3i}{2i-3}$$

$$3)\left(2+3i\right)^2 \cdot 2\left(1-2i\right)^2 \cdot i^{13}$$

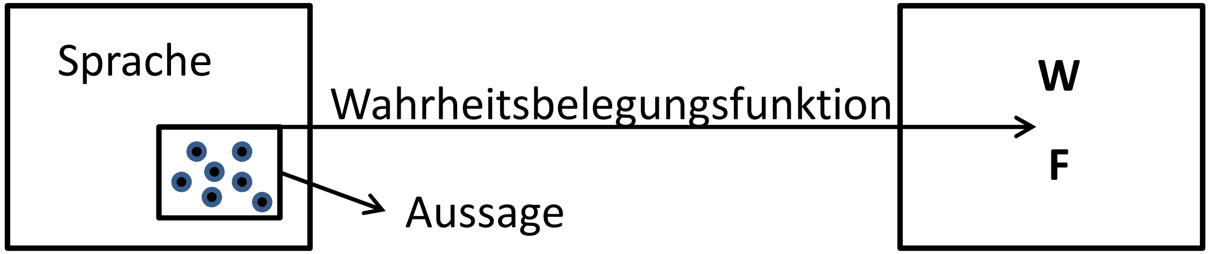
Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie auch ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was versteht man unter der imaginären Achse?
- ✓ Was hat die Modulo-Operation mit den komplexen Zahlen zu tun?
- ✓ Wie kann man mit komplexen Zahlen rechnen?
- ✓ Was ist die konjugiert komplexe Zahl?
- ✓ Was versteht man unter der Kartesischen Darstellung?
- ✓ Worauf ist bei der Division von komplexen Zahlen zu achten?
- ✓ Was ist das Argument und der Betrag einer komplexen Zahl?
- ✓ Welche Darstellungsformen einer komplexen Zahl kennen Sie?
- ✓ Wie groß sind die möglichen Winkel ohne Imaginärteil?

AUSSAGENLOGIK



<u>Aussage:</u>
Eine Aussage ist ein Satz der eindeutig als wahr **oder** falsch klassifiziert werden kann.

<u>Aussageform:</u>
Eine Aussageform A(x) ist ein Satz der mindestens von einem flexiblen Zustand bzw. einer Variablen abhängig ist und dadurch zu einer Aussage wird.

<u>Wahrheitsbelegungsfunktion:</u>
Es handelt sich um eine einstellige Funktion, die einer beliebigen Aussage den Wert „wahr“ oder „falsch“ zuordnet.

<u>*Beispiel*</u>:

Wahre Aussage: $40 + 2 = 42$

Falsche Aussage: $\sqrt{-42} \in \Re$

Aussageform: $x + 42 = 0$

LOGISCHE OPERATOREN

PRIORITÄT

Negation: $\neg$

$$\neg(W) = F$$
$$\neg(F) = W$$

einstellig

=

Konjunktion: $\wedge$

$\wedge$	W	F
W	W	F
F	F	F

Disjunktion: $\vee$

$\vee$	W	F
W	W	W
F	W	F

Subjunktion: $\rightarrow$

$\rightarrow$	W	F
W	W	F
F	W	W

Bijunktion: $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$	W	F
W	W	F
F	F	W

zweistellig

WAHRHEITSTABELLEN

In einer Wahrheitstabelle werden alle möglichen Szenarien einer Schaltung abgebildet und durchgespielt.

Die positiven Ergebnisse werden als Erfüllungsmenge der Aussage *E[A]* bezeichnet.

Mit *n* Eingängen können 2^n verschiedene Eingabemuster erzeugt werden, wobei in den jeweiligen Zeilen stets $2^{n-Zeilennummer}$ mal wechselnd WAHR bzw. FALSCH steht. Die folgenden Zeilen werden analog oder durch Halbierung der Muster gebildet.

Beispiel: *3 Eingabevariablen = 8 verschiedene Eingabemuster*

a	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**
b	**W**	**W**	**F**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
c	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**
...								
...								
E[A]								

GESETZE

Kommutativgesetz:	$a \wedge b = b \wedge a$	$a \vee b = b \vee a$
Assoziativgesetz:	$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$
Distributivgesetz:	$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$	$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
De Morgan:	$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$	$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
Absorption:	$a \wedge (a \vee b) = a$	$a \vee (a \wedge b) = a$
Idempotenz:	$a \wedge a = a$	$a \vee a = a$
Neutralität:	$a \wedge W = a$	$a \vee F = a$
Übergewicht:	$a \wedge F = F$	$a \vee W = W$

ZUSAMMENHÄNGE

Tertium non datur: $a \vee \neg a = W$

Widerspruch: $a \wedge \neg a = F$

Doppelte Negation: $\neg(\neg a) = a$

Subjunktion: $a \rightarrow b = (\neg a \vee b)$

Bijunktion: $a \leftrightarrow b = ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a))$

$a \leftrightarrow b = ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))$

Kontraposition: $a \rightarrow b = (\neg b \rightarrow \neg a)$

BEGRIFFE

<u>Präfix (lat. prae „*vor*“ und fix „*fest*“):</u>
Ist in der deutschen Sprache eine sogenannte Vorsilbe und beschreibt in der Mathematik ein Objekt, dass sich vor einem Term o.ä. befindet.

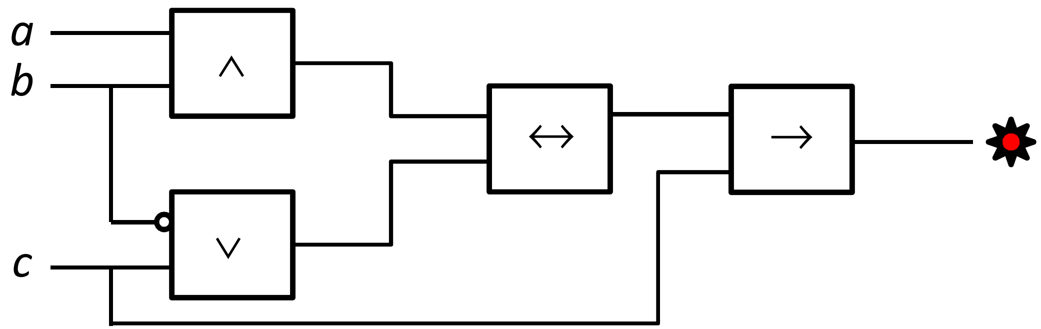
Ein Präfix vor einer Einheit gibt z.B. Auskunft darüber mit welcher Zehnerpotenz zu multiplizieren ist ($1\ GB = 1\ GigaByte = 1 \cdot 10^9\ Byte$)

<u>Infix (lat. in „hinein“ und fix „*fest*“):</u>
Ein Infix steht also innerhalb eines Ausdruck.
Dadurch existieren die Operatoren der Arithmetik in der Infix-Notation ($73 - 42$)

<u>Postfix (lat. post „nach“ und fix „*fest*“):</u>
Ein Postfix steht also stets hinter einem Term oder Ausdruck.
So ist z.B. das Gleichheitszeichen ein Postfix dar ($73 - \mathrm{x} = 42$)

BEISPIEL EINER SCHALTUNG

Schaltung:



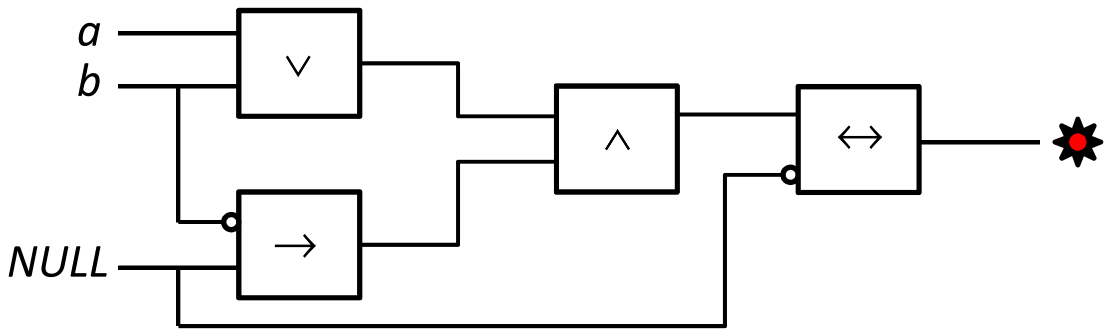
Wahrheitstabelle: $[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \to c$ $\qquad E[A] = Bool^3 \setminus \{(FWF)\}$

a	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**
b	**W**	**W**	**F**	**F**	**W**	**W**	**F**	**F**
c	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**	**W**	**F**
$a \wedge b$	W	W	F	F	F	F	F	F
$\neg b$	F	F	W	W	F	F	W	W
$\neg b \vee c$	W	F	W	W	W	F	W	W
$(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)$	W	F	F	F	F	W	F	F
$[(a \wedge b) \leftrightarrow (\neg b \vee c)] \to c$	**W**	**W**	**W**	**W**	**W**	**F**	**W**	**W**

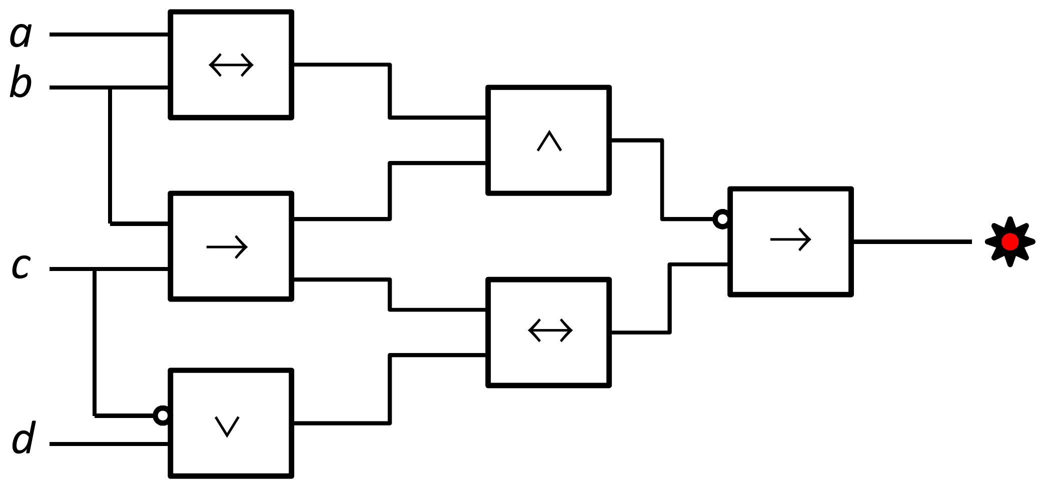
AUFGABEN

Geben Sie zu den folgenden Schaltungen die Erfüllungsmenge an.

1)



2)



FORMELKLASSEN

Je nach Art der Erfüllungsmenge kann der Ausdruck/ die Schaltung klassifiziert werden.

Tautologie (allgemeingültig):
Die Erfüllungsmenge der Aussage ist $Bool^n$ *, d.h. die Lampe brennt immer.*

Beispiel: $A(p,q) = p \wedge q \to p \Rightarrow E[A] = Bool^2$

Kontingenz (erfüllbar):
Die Anzahl der Erfüllungsmuster liegt in $[1;(n-1)]$*, d.h. die Lampe brennt manchmal.*

Beispiel: $A(a,b,c) = a \wedge (b \to \neg a \vee c) \leftrightarrow b \Rightarrow E[A] = \{(WWW);(FFW);(FFF)\}$

Kontradiktion (ungültig):
Die Erfüllungsmenge der Aussage ist $\{\ \}$ *, d.h. die Lampe brennt nie.*

Beispiel: $A(x,y) = (x \wedge \neg x) \wedge (y \vee \neg y \to x \leftrightarrow y) \Rightarrow E[A] = \{\ \}$

IMPLIKATION / ÄQUIVALENZ

Implikation (Folgerung):
Soll ein Ausdruck 2 die Folgerung aus einem Ausdruck 1 sein $(A_1 \rightarrow A_2)$,wird mittels Wahrheitstabelle die Subjunktion geprüft.
Stellt diese **Subjunktion** eine **Tautologie** dar, so handelt es sich um eine **Implikation**.

$$A = (A_1 \rightarrow A_2) : E[A] = Bool^n \quad \text{also} \quad A_1 \Rightarrow A_2$$

Äquivalenz (Gleichheit):
Soll ein Ausdruck 1 gleichwertig mit einem Ausdruck 2 sein $(A_1 \leftrightarrow A_2)$,wird mittels Wahrheitstabelle die Bijunktion geprüft.
Stellt diese **Bijunktion** eine **Tautologie** dar, so handelt es sich um eine **Äquivalenz**.

$$A = (A_1 \leftrightarrow A_2) : E[A] = Bool^n \quad \text{also} \quad A_1 \Leftrightarrow A_2$$

AUFGABEN

Bestimmen Sie die Erfüllungsmenge der folgenden Aussagenverbindung.
Geben Sie anschließend an, um welche Formelklasse es sich handelt (Begründung).

1) $A(p,q,r) \coloneqq p \to (q \vee r) \leftrightarrow \neg(q \vee r) \to \neg p$

2) $A(p,q,r) \coloneqq \neg(p \to (q \vee r)) \vee (q \wedge r)$

3) $A(x,y,z) \coloneqq (x \wedge y) \vee (\neg x \vee \neg y) \to z \leftrightarrow x \vee y \to z$

Prüfen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob die Aussage $T_1(x,y,z) = x \wedge y \to z$ eine Folgerung aus $T_2(x,y,z) = x \wedge (y \to z)$ darstellt und begründen Sie Ihr Ergebnis.

Prüfen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob die beiden Aussagen $A_1(a,b,c) \coloneqq a \wedge b \to c$ und $A_2(a,b,c) \coloneqq a \wedge (b \to c)$ identisch sind.

FORMALISIERUNG

<u>Variablendefinition:</u>
Im ersten Schritt muss für jeden Zustand oder auch für jeden geschilderten Sachverhalt eine Variable definiert werden.

<u>Aussagendefinition:</u>
Für jede existierende Aussage wird nun mittels der zuvor definierten Variablen eine aussagenlogische Formel generiert.

<u>Formalisierung:</u>
Im letzten Schritt werden die erstellten Formeln miteinander verbunden.
Handelt es sich um ein gleichzeitiges Auftreten der Zustände mittels Bijunktion, bei einer Folgerung (wenn … dann) mit der Subjunktion.

Wahrheitstabellen

BEISPIEL FORMALISIERUNG

Andreas, Benedikt, Carolin und Dora sind auf eine Party eingeladen:

- ✓ Wenn Andreas geht, dann geht auch Benedikt.
- ✓ Carolin und Dora gehen nicht beide.
- ✓ Von Andreas und Dora gehen mindestens einer.
- ✓ Wenn Benedikt oder Dora geht, dann geht auch Carolin.

Es werden demzufolge die folgenden 4 Variablen definiert:

a:	Andreas
b:	Benedikt
c:	Carolin
d:	Dora

BEISPIEL FORMALISIERUNG

<u>Die Aussagen liefern die folgenden Aussagen:</u>

- ✓ Wenn Andreas geht, dann geht auch Benedikt. ⟶ $a \to b$
- ✓ Carolin und Dora gehen nicht beide. ⟶ $\neg(c \wedge d)$
- ✓ Von Andreas und Dora gehen mindestens einer. ⟶ $a \vee d$
- ✓ Wenn Benedikt oder Dora geht, dann geht auch Carolin. ⟶ $(b \vee d) \to c$

BEISPIEL FORMALISIERUNG

Da alle 4 Aussagen gleichzeitig erfüllt sein müssen, erhält man:

$$(a \to b) \wedge \neg(c \wedge d) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee d \to c)$$

Die dazugehörige Wahrheitstabelle liefert das folgende Ergebnis:

a	W	W	W	W	W	W	W	W	F	F	F	F	F	F	F	F
b	W	W	W	W	F	F	F	F	W	W	W	W	F	F	F	F
c	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F	W	W	F	F
d	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F	W	F
...																
E[A]	**F**	**W**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**	**F**

Wie man erkennen kann, geht Andreas, Benedikt und Carolin auf die Party.

AUFGABEN

1) Lösen Sie folgenden Kriminalfall, bei dem nach Ermittlungen bekannt ist:

   ✓Falls *Hugo* und *Esmeralda* nicht beide beteiligt waren, dann ist auch *Fred* außer Verdacht.

   ✓Ist *Esmeralda* schuldig oder *Fred* unschuldig, so kann auch *Hugo* nicht der Täter sein.

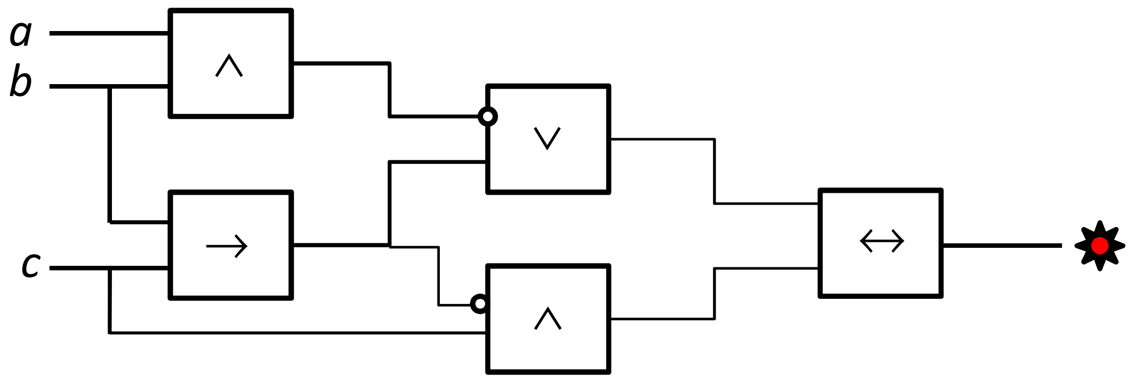
   ✓Aber mindestens einer der drei war der Täter.

   Formalisieren Sie dazu zuerst die gegebenen Sachverhalte und bestimmen anschließend mittels Wahrheitstabelle den Mörder.

AUFGABEN

Geben Sie die Erfüllungsmenge an und ggf. die Aussage bzw. die Schaltung.

1)



2) $\neg(a \leftrightarrow b \vee c) \leftrightarrow c \wedge \neg a \rightarrow b$

3) $x \rightarrow \neg y \wedge z \leftrightarrow z \vee \neg x \rightarrow y$

AUFGABEN

1. Geben Sie die Erfüllungsmenge folgender Aussage an und begründen Sie die zugrundeliegende Formelklasse. $A(p,q,r) = (r \vee (p \to q)) \wedge (\neg r \vee q)$

2. Prüfen Sie ob die beiden Aussagen $T_1(a,b,c) = a \wedge b \to c$ und $T_2(a,b,c) = (a \to c) \vee (b \to c)$ identisch sind. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

3. Gegeben sind die beiden Ausdrücke $A_1(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (y \wedge z)$ und $A_2(x,y,z) = (\bar{x} \wedge z) \vee (x \wedge y)$
   Ist die Subjunktion von A_2 auf A_1 allgemeingültig?

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

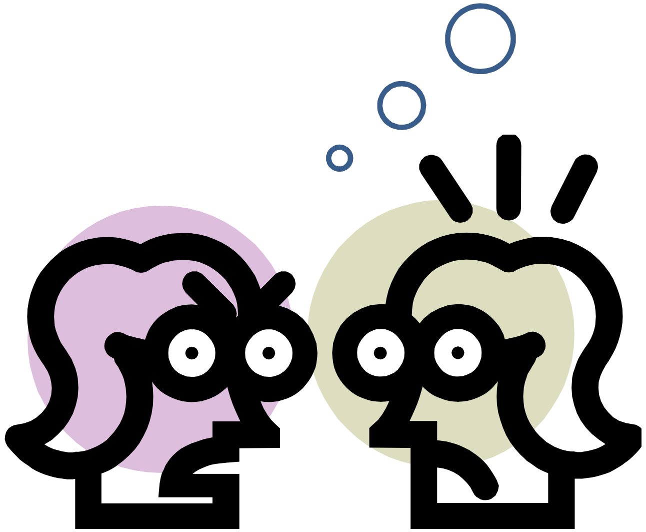
WIEDERHOLUNG

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Worin liegt der Unterschied zwischen Aussage und Aussageform?
- ✓ Was versteht man unter Bijunktion bzw. Subjunktion?
- ✓ Welche Operatoren stammen direkt aus der Mengenlehre?
- ✓ Was versteht man unter einer Wahrheitstabelle?
- ✓ Was beschreibt die Erfüllungsmenge einer Aussage?
- ✓ Wann benutzt man den Ausdruck Bool?
- ✓ Was versteht man unter einer Formelklasse?
- ✓ Was versteht man unter einer Formelklasse?
- ✓ Was kann man durch die Äquivalenz beweisen?
- ✓ Wann hat man eine Implikation?
- ✓ Aus welchen wesentlichen Schritten besteht die Formalisierung?
- ✓ Wie kann man eine eindeutige Lösung ermitteln?

ARITHMETIK

Die Klammer sprach: „Zuerst komm ich,
Gefolgt vom Punkt und dann der Strich“



BINOMISCHE FORMELN I

1. Binom: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binom: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

<u>Methodik:</u>
1. Quadrierung der linken Variablen
2. Das Doppelte von linker mal rechter Variablen
3. Quadrierung der rechter Variablen

Beispiel:

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3y) + (-3y)^2$$
$$(2x-3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$
$$(-4x^3 + 2y^2)^2 = 16x^6 - 16x^3y^2 + 4y^4$$

BINOMISCHE FORMELN II

3. Binom: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiel:

$$(-3x+2y)\cdot(-3x-2y) = 9x^2 + 6xy - 6xy - 4y^2$$

oder einfacher

$$(-3x+2y)\cdot(-3x-2y) = 9x^2 - 4y^2$$

Anwendungsbeispiele:

- Entfernen einer Wurzel aus einer Summe
- Entfernen des Imaginäranteils einer komplexen Zahl (konjugiert komplexe Zahl)

PASCAL'SCHE DREIECK I

Exponent (n)	$(a+b)^n$
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1

Elemente in der 7. Zeile:

Ganz links: 1

Nebenan: 7, denn $1 + 6 = 7$

Nebenan: 21, denn 6+15 $= 21$

Nebenan: 35, denn $15 + 20 = 35$

Somit ergibt sich für die 7. Zeile die folgende Struktur:

$$1 - 7 - 21 - 35 - 35 - 21 - 7 - 1$$

PASCAL'SCHE DREIECK II

Methode des Pascall'schen Dreiecks:

1. Koeffizienten:

Sie gehen an die richtige Zeile des Pascall'schen Dreiecks und schreiben die Koeffizienten mit einem »+« versehen ab.

2. Linke Variable:

Jetzt nehmen Sie den linken Teil der Summe und notieren diesen **in Klammern** hinter die Koeffizienten des ersten Schritts. Anschließend schreiben Sie von **links** anfangend den **höchsten** Exponenten **minus eins** bis zum Exponenten Null über die linke Variable.

3. Rechte Variable:

Nun benutzen Sie den rechten Teil der Summe. Diesen Ausdruck schreiben Sie ebenfalls **in Klammern** hinter den Term aus Schritt zwei. Weil es ja die rechte Variable ist, fangen Sie jetzt auf der **rechten Seite** mit dem **höchsten** Exponenten an und enden auf der linken Seite mit der Null.
Schon sind Sie fertig und können den entstandenen Ausdruck berechnen und zusammenfassen.

1) Berechnen Sie das Ergebnis mit Hilfe der Binomischen Formeln.

$$(2x - 4y)^2 \cdot (2y + x)^2$$

$$48 \cdot \left(0{,}5x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{4}x - 2y\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x + 2y\right)$$

$$12 \cdot \left(-\frac{2}{3} + 6x\right)^2 \cdot \big((3 - 4x) - 2(5 - 2x)\big)$$

2) Entfernen Sie den Wurzelterm aus dem Nenner.

$$\frac{x-2}{5-2\cdot\sqrt{3x-5}} \quad \frac{\sqrt{x}}{3\cdot\sqrt{2x}+\sqrt{4-x}}$$

3) Bestimmen Sie die Lösung der Aufgaben mit Hilfe des Pascall'schenDreiecks

$$(2x - y)^5 \quad \left(-\frac{1}{2}x - 4\right)^4$$

AUFGABEN

1) $\frac{\sqrt{x}-3x}{2\sqrt{x}-5}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{y-3}+2x}{\sqrt{y+2}-3x}$ $\qquad$ $\frac{3a+4}{2\sqrt{a-2}+3\sqrt{5-2a}}$

2) $\frac{4i-3}{2+i}$ $\qquad$ $\frac{5i+3}{1-3i}$ $\qquad$ $\frac{7i-5}{4i-3}$

3) $z=2\cdot\frac{5i}{3i-4}-\frac{6i-4}{2-i}+\frac{1}{5}i$

4) $(2a-ab)^4$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^5$ $\qquad$ $\left(4\frac{ab}{c}+0{,}5\frac{c}{b}\right)^4$

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wo liegt der Unterschied zwischen dem 1. und 2. Binom?
- ✓ Wie nutzt man das 1./2. Binom zum Kopfrechnen?
- ✓ Für was kann man das 3. Binom nutzen?
- ✓ Wie kann man mit dem 3. Binom kopfrechnen?
- ✓ Was versteht man unter der konjugiert komplexen Zahl?
- ✓ Was ist die Koeffizientenstruktur des Pascal‘sche Dreieck?
- ✓ Wie funktioniert das Pascal‘sche Dreieck?
- ✓ Was sind die Voraussetzungen für das Pascal‘sche Dreieck?

Ü **4.2.26** *Dividiere:* **a)** $(3ax - 4ay + 3bx - 4by) : (a + b)$;
b) $(6u^2 - 4u^2v + 5uv + 2uv^2 - 4v^2) : (2u - v)$;
c) $(18x^2 - 15x^2y + 10xy^2 - 8y^2) : (3x - 2y)$;
d) $(4x^2 - 3x^2y + 3xy^2 - 4xy + 5xz - 3xyz - yz + z^2) : (x - y + z)$.

Ergänzende Aufgaben:

Ü **4.2.27** *Löse die Klammern auf und fasse gegebenenfalls zusammen:*
a) $3a + (2b - 2a)$; **b)** $4x - (3x + y)$; **c)** $-2u + (3v + 4u)$;
d) $d - e - (d - e)$; **e)** $3c - 4a - (2a - 3c)$; **f)** $5a - (5a + b)$;
g) $4x - (3y + (z - 4x) - z)$; **h)** $5u - 6v - (3w - (6v - 5u + 3w))$;
j) $a - (b - (a + b - (c - 2a + b) + c))$;
k) $2z - (x - (y + x - (z + x) - z))$.

Ü **4.2.28** *Setze Klammern an den gekennzeichneten Stellen:*
a) $a +' c - d'$; **b)** $x -' u + v'$; **c)** $f -' e - d'$; **d)** $a -' c -' d - e' - f'$.

Ü **4.2.29** *Multipliziere aus:*
a) $2u(3a - 4c)$; **b)** $6y(2d + 3c)$; **c)** $5a(x - y)$; **d)** $(-3y)(-x - u)$.

Ü **4.2.30** *Klammere aus:*
a) $28xz - 14xy + 35ux$; **b)** $48abc - 12ab + 36ac$;
c) $9bc + 27abc + 18bcd$; **d)** $15uvw + 18uv - 33uvx$.

Ü 4.2.31 *Multipliziere aus:*

a) $(2x-3z)(4a-2b)$; b) $(a+b+c)(d-e)$;
c) $(2a-3b+4c)(6u-5v+8w)$; d) $(5ab-6c)(x+y-z)$;
e) $(2x-3z)(4x+5z)$; f) $(5a-b)(3a-2b)$;
g) $(2u-2v+3w)(u+4v-6w)$; h) $(3a-b)(6x-2y)(3x-b)$;
j) $(x-3)(x+2)(x-1)$; k) $(2-x+y)(y-3)(2x+2)$.

Ü 4.2.32 *Klammere aus:*

a) $2ux-uy+6vx-3vy$; b) $10ac+6bc+5ad+3bd$;
c) $4ax-12ay-2cx+6cy$; d) $au+az+dv-du-av-dz$;
e) $2ax+3by-2ay-3bx+cx-cy$;
f) $ux-vy-wz+vx-wx-uy+wy+uz+vz$;
g) $ab-ay-2bx+3au-6ux+2xy$; h) $bx-by-ax+ay$;
j) $3xz+6xy-2y-z$; k) $8abcx-2cx-4ab+1$.

Ü 4.2.33 *Dividiere:*

a) $(12uv-18uw+6ux):3u$; b) $(7ax+49ay):7a$;
c) $(24abc+36acd-18acx):3ac$.

Ü 4.2.34 *Dividiere:*

a) $(6au-4av-6bu+4bv):(a-b)$;
b) $(12a^2-8a^2b+29ab-6ab^2+15b^2):(4a+3b)$;
c) $(18u^2-3u^2v+2uv^2-8v^2):(3u-2v)$;

Ü 4.0.1 *Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:*
a) $u - 2v - (3u - (2v + 4u))$; b) $x - (y - (z - y))$.

Ü 4.0.2 *Klammern Sie aus:* a) $12bcg - 20abc + 8bcd$;
b) $6au - 2av + 6bu - 2bv$; c) $ax - ay + bx - by$.

Ü 4.0.3 *Multiplizieren Sie aus:* a) $2c(3a - 4b)$; b) $(2a - 3b)(4x - y)$;
c) $(a + b - c)(a - b + c)$.

Ü 4.0.4 *Dividieren Sie:* a) $(12acx - 8cy) : 4c$;
b) $(3ax - 2ay + 3bx - 2by) : (a + b)$;
c) $(x^3 + 2x^2y + 3xy + 4xy^2 + 2y^2) : (x + 2y)$.

Ü 4.2.5 *Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:*
a) $2a + (3b + c)$; b) $d - 2e - (f - 2g)$; c) $4a - 2b - (4a - 3b)$;
d) $5e + 3x + (3x - 4e)$; e) $2u - (u - v) - v$; f) $3a + b + (a - 2b)$.

Ü 4.2.7 *Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen:*
a) $2x - 4y - (2x - (x + 3y))$; b) $g + (2f - (g + 2f))$;
c) $u - (v - (2u + (u - v) + v) - u)$; d) $a + b - (2a - (b + a) - b)$.

Ü 4.2.9 *Setzen Sie an den durch ' gekennzeichneten Stellen Klammern:*
a) $x+'y+z+v'$; b) $u-'v-w+x'$; c) $x-'u+v+w'$; d) $x-'y+'u-v'+z'$.

Ü 4.2.14 *Klammern Sie aus:*
a) $5ag+20ab+15ac$; b) $49xz-14xu+21xy$;
c) $8def-4deg+11ade$; d) $6ac-12abc+36acg-18xcx$.

Ü 4.2.17 *Multiplizieren Sie aus:*
a) $(x+2y)(u-3v)$; b) $(2a-3b)(4c-5d)$;
c) $(9a+4b-3c)(6u-3x+4z)$; d) $(4x-2y)(3u+2v)(a+b)$.

Ü 4.2.19 *Multiplizieren Sie aus:*
a) $(4a+3b)(8a-6b)$; b) $(5u-3v)(2u+4v)$; c) $(x-y+z)(x+y-z)$.

Ü 4.2.21 *Klammern Sie aus:*
a) $8au-6av+4bu-3bv$; b) $ax-2ay-2bx+4by$;
c) $12uv-3uy+4vx-xy$; d) $2ab-2bc+2au-2av-2cu+2cv$;
e) $14ax+14az-9by+6bx-21ay-2cx+3cy+6bz-2cz$.

Ü 4.2.24 *Dividieren Sie:*
a) $(24ax-12ay):6a$; b) $(28ux-35vx+14xy):7x$.

TEILBARKEIT

Eine ganze Zahl *a* ist dann durch eine ganze Zahl *b* teilbar, wenn das Ergebnis *q* der Division ebenfalls eine ganzen Zahlen ist, so dass man die Teilbarkeitsrelation wie folgt definieren kann:

$$| = \{(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in Z \times Z \mid b = q \cdot a; q \in Z\}$$

In der Mathematik nutzt man anstelle von $(a, b) \in |$ primär die Infix-Notation $a|b$ (gesprochen: *a* teilt *b*).

Daraus ergeben sich die folgenden Regeln / Zusammenhänge:

- Transitivität: $a|b \ \wedge b|c \quad \rightarrow a|c$
- Kürzbarkeit: $c \cdot a|c \cdot b \quad \rightarrow a|b; c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$
- Produktregel: $a|b \ \wedge c|d \quad \rightarrow a \cdot c|b \cdot d$
- Linearität: $a|b_1 \ \wedge a|b_2 \quad \rightarrow a|m \cdot b_1 + n \cdot b_2; m, n \in \mathbb{Z}$

DIVISION MIT REST

Bei einer ganzzahligen Division mit Rest werden zwei Zahlen $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{a} \neq 0$ betrachtet. Bei der Division entstehen immer zwei eindeutige Zahlen $\mathrm{p}, \mathrm{q} \in \mathbb{Z}$, so dass die größere Zahl *b* stets als *Produkt + Rest* beschrieben werden kann.

$$b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$$

Als ganzzahlige Division von *b* und *a* erhält man demzufolge *q* und es gilt: $\frac{b}{Z^a} = q$

Diese Definition des Rests haben wir bereits auf Seite 7 mit der Modulo-Operation kennen gelernt. Bei der Modulo-Operation erhalten wir nur den Rest der Division.

Beispiel: $a = 8; b = 115$

$115 = 112 + 3 = 14 \cdot 8 + 3 \Rightarrow q = 14, r = 3$

Es gilt demzufolge: $\frac{115}{Z^8} = 14$ und $115 \; mod \; 8 = 3$

GRÖßTER GEMEINSAMER TEILER

ggT: größter gemeinsamer Teiler:

Beim größten gemeinsamen Teiler sucht man die größtmögliche natürliche Zahl, die zwei oder mehr Zahlen ganzzahlig teilt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $d|a$ und $d|b$, wodurch *d* ein gemeinsamer Teiler von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jeden anderen gemeinsamen Teiler *c* von *a* und *b* gilt, dass $c|d$, dann ist *d* auch der größte gemeinsame Teiler von *a* und *b*:

$$d = ggT(a, b)$$

Haben zwei Zahlen als größten gemeinsamen Teiler nur die eins, so dass $ggT(a, b) = 1$ gilt, so sind die Zahlen teilerfremd.

KLEINSTES GEMEINSAMES VIELFACHES

<u>kgV: kleinstes gemeinsames Vielfaches:</u>

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist das Pendant zum zuvor definierten ggT.

Es wird hier eine möglichst kleine natürliche Zahl gesucht, die das Vielfache zweier Zahlen darstellt.

Es gibt $a, b, d \in \mathbb{Z}$ für die gilt $a|d$ und $b|d$, wodurch *d* ein gemeinsames Vielfaches von *a* und *b* sein muss.
Wenn jetzt für jedes andere gemeinsame Vielfache *c* von *a* und *b* gilt, dass $d|c$, dann ist *d* auch das kleinste gemeinsame Vielfache von *a* und *b*:

$$d = kgV(a, b)$$

Für die Berechnungen des ggT(a,b) und auch kgV(a,b) nutzt man u.a. das Verfahren der Primfaktorzerlegung.

PRIMFAKTORZERLEGUNG I

Primzahl:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist eine Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst teilbar ist: $P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; \dots\}$

Primfaktorzerlegung:

Eine natürliche Zahl $p > 1$ kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden. Sortiert man diese Primfaktoren, so erhält man die kanonische Darstellung.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n$$

Für die Zerlegung faktorisiert man die Ausgangszahl und startet bei der kleinsten Primzahl und fass anschließend gleiche Faktoren zusammen.

$$504 = 2 \cdot 252 = 2 \cdot 2 \cdot 126 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 63 = 2^3 \cdot 63$$
$$63 = 3 \cdot 21 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 7$$

$$\Rightarrow 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

PRIMFAKTORZERLEGUNG II

<u>Anwendung auf ggT(a,b) und kgV(a,b):</u>

Im ersten Schritt zerlegt man die zu betrachtenden Zahlen in deren Primfaktoren.

$$160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^5 \cdot 5$$
$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

<u>ggT - Bestimmung:</u>

Zur Berechnung des ggT fasst man die gleichen Primfaktoren als Produkt zusammen:

$$\Rightarrow ggT(160{,}144) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

<u>kgV - Bestimmung:</u>

Zur Berechnung des kgV nimmt man die am häufigsten vorkommenden Primfaktoren und setzt diese zu einem Produkt zusammen:

$$\Rightarrow kgV(160{,}144) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 32 \cdot 9 \cdot 5 = 1.440$$

AUFGABEN

1. Zerlegen Sie die gegebenen Zahlen im ersten Schritt in deren Primfaktoren und bestimmen anschließend den größten gemeinsamen Teiler ggT sowie das kleinste gemeinsame Vielfache kgV.

   a) $\mathrm{a} = 3.528 \wedge \mathrm{b} = 3.780$

   b) $\mathrm{a} = 776.160 \wedge \mathrm{b} = 2.494.800$

   c) $\mathrm{a} = 1.008 \wedge \mathrm{b} = 1.080 \wedge c = 2.940$

Euklidischer Algorithmus

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, kann man den ggT(a,b) einfach bestimmen.

Es gilt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a > 0$

1. Berechnung der ganzzahligen Division mit Rest: $b = q \cdot a + r \quad mit \quad 0 \leq q < |a|$

2.1. Ist $r \neq 0$, dann ersetze $b \coloneqq a$ und $a \coloneqq r$ und Starte wieder bei 1.

2.2. Ist $r = 0$, dann ist a der gesuchte Wert vom ggT(a,b).

Beispiel: $ggT(1.264\,,\ 616)$

$$
\begin{aligned}
1.264 \quad &= 2 \cdot 616 + 32 \\
616 \quad &= 19 \cdot 32 + 8 \\
32 \quad &= 4 \cdot 8 + 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow ggT(1.264\,, 616) = 8$

AUFGABEN

1. Wenden Sie bei den folgenden Aufgaben den Euklidischen Algorithmus an und bestimmen somit den ggT.

a) $a = 840 \wedge b = 980$

b) $a = 975 \wedge b = 2.340$

c) $a = 96.096 \wedge b = 1.092$

1) **Arithmetik:**

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit als möglich:

a) $-a+(3-(b+5-(c-2+(a+b))))-(c-4)$

b) $(2y+\frac{1}{2}x)(x-4y)-8(\frac{1}{4}x+y)^2$

2) $(2a^2-10ab+10ac-17bc+12c^2+6b^2):(a-2b+3c)$

$(8x^2y^2-14xy^2-6xyz+3y^2z-2xy^2z+4x^2y+4x^2yz):(2xy-3y)$

$(a^2b+2cd^2-3ab^2-5c^2d+5abc+abe-2abd-cde-acd+3bcd):(ab-cd)$

3) $x^3-2x^2-5x+6=0$

$2x^3-22x=8x^2-60$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Was bedeutet das Störprinzip in der Arithmetik?
- ✓ Wozu benötigt man die Menge der möglichen Teiler?
- ✓ Wie funktioniert die Polynomdivision?
- ✓ Was ist ein Linearfaktor?
- ✓ Was bewirkt ein Parameter in einer Funktionenschar?
- ✓ Was ist eine Tautologie in der Arithmetik?
- ✓ Wie hängt der Koeffizient mit der Variablen zusammen?
- ✓ Was ist die Nullform einer Gleichung?
- ✓ Wie wird die Teilbarkeitsrelation definiert?
- ✓ Welche Eigenschaften besitzt die Teilbarkeit?
- ✓ Was bedeutet der ggT(Zahl_1, Zahl_2)?
- ✓ Wofür braucht man das kgV(Zahl_1, Zahl_2)?
- ✓ Wie ist eine Primzahl definiert?
- ✓ Was ist die kanonische Darstellung als Produkt einer Zahl?
- ✓ Wie nutzt man die Primfaktorzerlegung für ggT / kgV?
- ✓ Wie funktioniert der euklidische Algorithmus?

BRUCHRECHNUNG I

<u>KgV: Kleinste gemeinsame Vielfache</u>
Hier versucht man durch Primfaktorenzerlegung eine Zahl zu finden, die durch die gegebenen Zahlen teilbar sind.
Dies benötigen Sie um Brüche **gleichnamig** zu machen.

$$\frac{5}{56} = \frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5 \cdot (3 \cdot 5)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{75}{840}$$

$$\frac{11}{60} = \frac{11}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{11 \cdot (2 \cdot 7)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{154}{840}$$

<u>ggT: größter gemeinsamer Teiler:</u>
Auch hier wird durch die Primzahlen eine Zahl gesucht. Nur diesmal müssen die gegebenen Zahlen durch das Produkt daraus teilbar sein.
Diese Methode wenden wir beim **Kürzen** an.

$$\frac{660}{1848} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{5}{2 \cdot 7} = \frac{5}{14}$$

BRUCHRECHNUNG II

Hauptnenner:
Damit Brüche addiert bzw. subtrahiert werden können, müssen diese im ersten Schritt auf den gleichen Nenner (Hauptnenner) gebracht werden, um abschließend die Zähler zusammen zu fassen.

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{8}=\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{12}{12}-\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{3}=\frac{16+36-15}{24}=\frac{37}{24}$$

Doppelbruch:
Bei einem Doppelbruch handelt es sich im Grunde genommen um eine Division von zwei Bruchtermen. Zur Berechnung werden der Zähler / Nenner im ersten Schritt in einen reinen Bruch umgewandelt und abschließend wird der Zähler mit dem Kehrwert des Nenners multipliziert.

$$\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}+\frac{4}{6}}=\frac{\frac{12-10}{15}}{\frac{2+12}{18}}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{14}{18}}=\frac{2}{15}\cdot\frac{18}{14}=\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 2\cdot 7}=\frac{6}{35}$$

BRUCHRECHNUNG III

Eine rationale, endliche Zahl wird in einen Bruch verwandelt, in dem man den Teil hinter dem Komma als separaten Bruch darstellt und diesen dann mit dem ganzen Teil der Zahl addiert.

$$8{,}375 = 8 + 0{,}375 = 8 + \frac{375}{1000} = 8 + \frac{3}{8} = 8\frac{3}{8} = \frac{67}{8}$$

Handelt es sich um eine periodische Zahl, so wird die Zahl vor der Periode getrennt und diese dann in einen Bruch verwandelt und mit dem Rest der Zahl addiert.

$$4{,}166666666\ldots = 4{,}1\overline{6} = 4{,}1 + 0{,}1\overline{6} = \frac{41}{10} + \frac{6}{90} = \frac{125}{30}$$

Kürzen Sie die Brüche soweit als möglich und geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an?

$\frac{48}{1188}$ b) $\frac{312}{54}$ c) $\frac{1688}{792}$

Wandeln Sie die gegebenen Dezimalzahlen in einen Bruch um und Kürzen diesen wenn möglich.

$2{,}0\overline{5}$ b) $8{,}0\overline{12}$ c) $1{,}625$

Bestimmen Sie das Ergebnis der Aufgaben, in dem Sie die Brüche erweitern und zusammenfassen.

$$\frac{2}{5} - \frac{5}{3} + \frac{7}{2} + 2\,\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{5}\right) - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{3}\right) \div \left(3 + \frac{7}{4}\right)$$

Fassen Sie den Doppelbruch soweit als möglich zusammen.

$$\frac{\frac{4}{7} - \frac{5}{6}}{\frac{9}{14} + \frac{5}{3}}\,\frac{\frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{\frac{4}{5} - \frac{10}{13}}\,\frac{\frac{2}{9} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}$$

Ü 4.5.25 Kürze: a) $\frac{49a^2-14ac+c^2}{14a-2c}$; b) $\frac{28u^2-63v^2}{12u^2+36uv+27v^2}$; c) $\frac{9x^2-25v^2}{3x+5v}$;

d) $\frac{4+4c+c^2}{c+2}$; e) $\frac{9u^2-6u+1}{9u^2-1}$; f) $\frac{27ad+18bd}{81a^2-36b^2}$; g) $\frac{x+x^2}{x^2-1}$;

h) $\frac{ax^2-ay^2}{2ax-3ay}$.

Ü 4.5.26 Addiere: a) $\frac{5}{6}+\frac{4}{15}-\frac{1}{10}$; b) $\frac{3}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{4}{21}$;

c) $\frac{b}{a}-\frac{a}{b}$; d) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2$; e) $\frac{u-v}{uv}-\frac{u-w}{uw}+\frac{v-w}{vw}$; f) $\frac{a-b}{a+b}-\frac{a}{a-b}$;

g) $\frac{1}{c+2}-\frac{1}{3a}+\frac{2b+1}{6ab}$; h) $\frac{2u^2-13v^2}{(2u-5v)^2}-\frac{2u+5v}{4u-10v}$; j) $\frac{4x-5}{2x-2}-\frac{6x+1}{3x-4}$;

k) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$; l) $\frac{x}{4x-8}-\frac{2x}{3x+6}+\frac{2x^2-9x}{5x^2-20}$

Ü 4.5.27 Berechne: a) $\frac{2}{7}:\frac{8}{21}$; b) $\frac{19}{27}:\frac{38}{63}$; c) $\frac{28ac}{9bd}:\frac{7ab}{12cd}$

d) $\frac{4xy}{7z}:\frac{8xy}{21z}$; e) $\frac{4u^2-16v^2}{3(u+v)}:\frac{2u-4v}{3u+6v}$.

Ü 4.5.28 Vereinfache: a) $\dfrac{\frac{x}{y}+1}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$; b) $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}}$; c) $\dfrac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{1-\frac{a}{a-b}}$.

1) $$\frac{\frac{2}{9}+\frac{4}{15}}{\frac{4}{3}-0{,}7} \qquad \frac{\frac{3x}{4y}-\frac{5}{3z}}{\frac{5x}{6yz}+\frac{3z}{2x}}$$

2) $$\frac{2}{5x}-\frac{3}{4}+\frac{5}{12}-1\frac{1}{6}=\frac{4}{15x}-0{,}9$$

3) **<u>Bruchrechnung (8 Punkte):</u>**

a) $3-\frac{2x+3y}{x+y}-\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$

b) $\dfrac{-\frac{0{,}5}{5}-\frac{1}{2yx}}{\frac{xy}{5}+2+\frac{5}{xy}}$

a) $\frac{2u^2-2uv}{u^2-v^2}-\frac{4}{3}+\frac{1}{u}$

b) $\dfrac{\frac{a}{3}+2+\frac{3}{a}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2a}}$

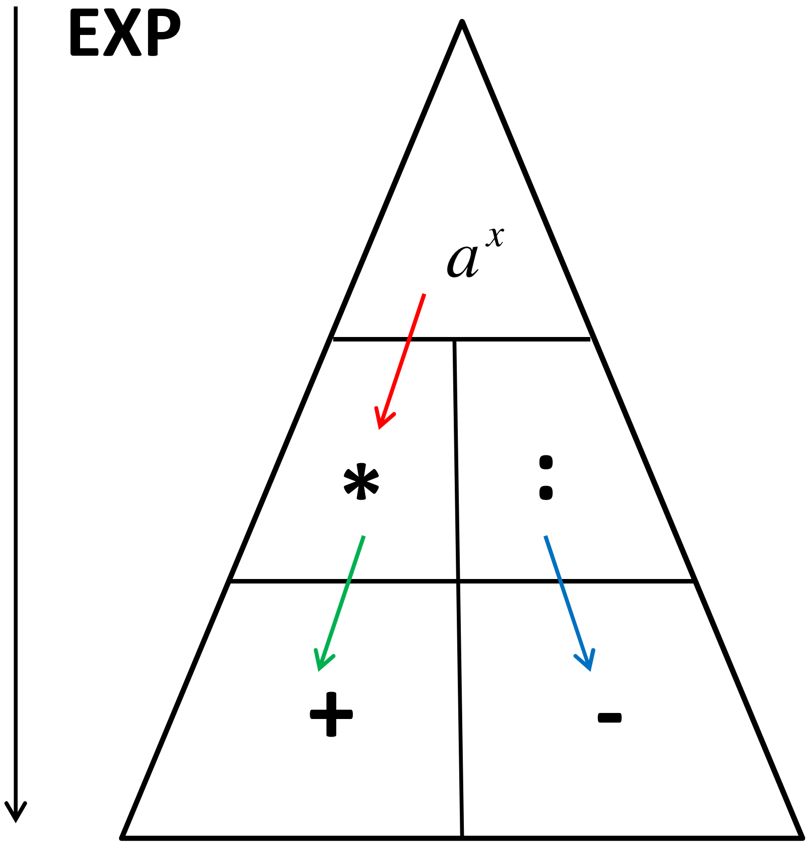
Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?

Wiederholung

Diese Fragen sollten Sie ohne Skript beantworten können:

- ✓ Wie addieren / subtrahieren Sie Brüche?
- ✓ Wie kann man einen gemischten Bruch multiplizieren?
- ✓ Worauf ist bei der Division durch einen Term zu achten?
- ✓ Wie lösen Sie einen Doppelbruch auf?
- ✓ Wie kann man eine Bruchgleichung lösen?
- ✓ Wofür nutzt man kgT und ggV?
- ✓ Woran erkennt man eine periodische Zahl?
- ✓ Wie wandelt man eine Kommazahl in einen Bruch um?

POTENZGESETZE



$$\left(x^3\right)^4 = x^{3\cdot 4} = x^{12}$$

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

$$\frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$$

EIGENSCHAFTEN VON POTENZEN

Wichtige Zusammenhänge für die Potenzberechnung mit rationalem Exponenten:

<u>Polynom:</u>
Der höchste natürliche Exponent bestimmt den Grad des Polynoms $x^n + a \cdot x^{n-1} + \ldots + z \cdot x^0$

Beispiel: $x^5 - 2 \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - 12$ *Polynom vom Grade 5*

<u>Wurzel:</u>
Der Grad einer Wurzel steht immer im Nenner des Exponenten $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

Beispiel: $\sqrt[3]{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$

<u>Brüche:</u>
Ein negativer Exponent wird durch einen Positionswechsel positiv $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Beispiel: $\left(\frac{2}{x^2}\right)^{-2} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 = \frac{x^4}{4}$

AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

1) $\sqrt{x^3 \cdot \sqrt[4]{x^6 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$

2) $\dfrac{(8u^2v^{-2}w)^4}{(81r^{-3}s^{-2}t^3)^2} : \dfrac{(3^4r^{-3}s^4t^3)^{-2}}{(2^4u^3v^{-4}w^{-2})^{-3}}$

3) $\dfrac{\sqrt[k]{a^{2-k}}}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{3k+4}} \cdot \left(\dfrac{\sqrt[k]{a}}{\left(\sqrt[k]{a^2}\right)^{k+3}}\right)^{-2}$

4) $\sqrt{\dfrac{y^{-2} \cdot \left(x \cdot z^3\right)^5}{x^{-3} \cdot y^4 \cdot z^7}}$

5) $\dfrac{(5ab^{-3}c^2)^3}{(2^{-3}x^2y^0)^{-2}} : \dfrac{(4^{-1}a^{-2}b^0c^3)^2}{(25xy^{-3})^{-2}}$

6) $\left[\dfrac{\sqrt[2x]{n^{3x-2}}}{\sqrt[2x]{n^{4x-4}}} \cdot \left(\sqrt[2x]{n}\right)^{5x-2}\right]^3$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\sqrt{x^3} = 125$

b) $\left(\sqrt[3]{x^5}\right)^2 = 1024$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{16}{x^2}} = 0{,}25$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 9}$

II) $g(x) = 5 \cdot \left(2x - 8\right)^{-2}$

III) $h(x) = \left(x^2 - 4\right)^2$

AUFGABEN ZU POTENZEN

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzgesetze.

1) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4 \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt[3]{a}} \cdot a^2}$

2) $\dfrac{3(2x^{-2}y^{-3})^2}{4(3a^3b^{-2})^3} \cdot \dfrac{8(3a^4b^{-3})^2}{9(2x^{-1}y^{-2})^3}$

3) $\dfrac{\dfrac{42}{\sqrt[n]{x^{10}}}\sqrt[2n]{x^{4n-6}}}{\left(\sqrt[n]{x^2}\right)^{3-2n}} : \left(\dfrac{\left(\sqrt[n]{x}\right)^{2n+5}}{\sqrt[\frac{n}{2}]{x^{6-n}}}\right)^{-2}$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und geben die Lösungsmenge an.

a) $\left(\sqrt[12]{x^6}\right)^3 = 64$

b) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-4} = \dfrac{16}{81}$

c) $\sqrt{\sqrt[5]{x^4}} = \left(\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^4}}\right)^2$

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- und Wertebereich an.

I) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{x-2}}$

II) $g(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 7x + 12\right)^{-5}$

OPERATION / GEGENOPERATION

Im Bereich der Arithmetik wird durch Bildung der abhängigen Gegenoperation stets das neutrale Element erzeugt (Multiplikation: 1 und Addition: 0).

<u>Lineare Gleichung:</u>

Mittels einfacher Gegenoperationen und den zugehörigen neutralen Elementen wird eine Gleichung nach der Unbekannten freigestellt.

Beispiel: $3 \cdot x - 5 = 4 \Leftrightarrow 3 \cdot x - 5 + 5 = 4 + 5 \Leftrightarrow 3 \cdot x + 0 = 9 \qquad | +5$

$$3 \cdot x + 0 = 9 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + 0 = 9 \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot x + 0 = 3 \Leftrightarrow x = 3 \qquad |: 3$$

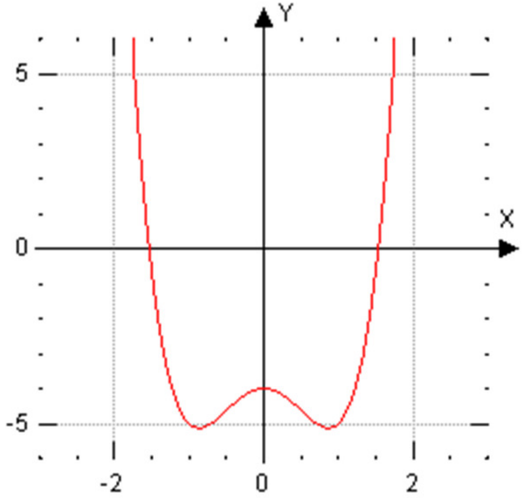
<u>Potenzgleichung:</u>

Nach Überführung des Terms in einen reinen Potenzausdruck wird der Exponent mittels elementarer Umformungen zum neutralen Element 1 umgewandelt.

Beispiel: $\sqrt[3]{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow x^1 = \sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8$

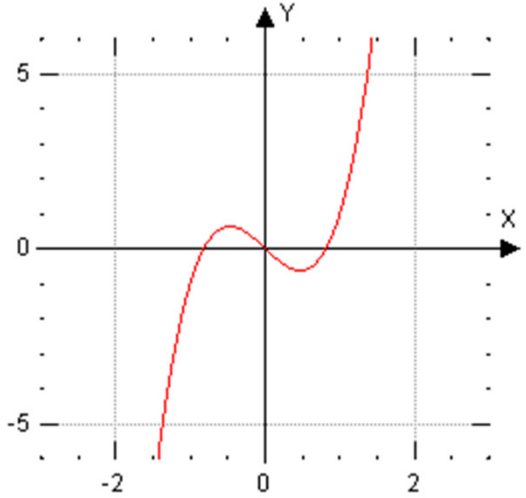
FUNKTIONSGRAPHEN I

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4$$



- Achsensymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 4)

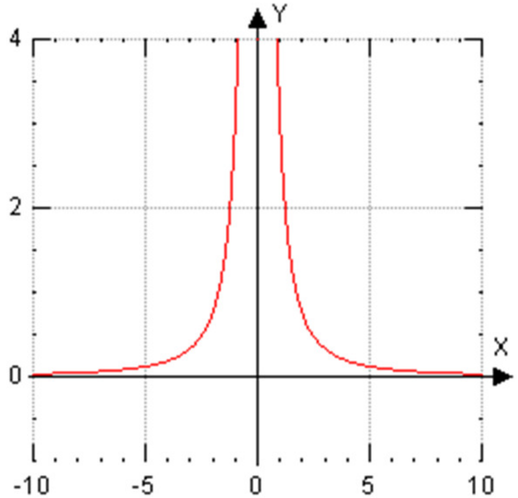
$$f(x) = 3x^3 - 2x$$



- Punktsymmetrie
- Ganzrationales Polynom (Grad 3)

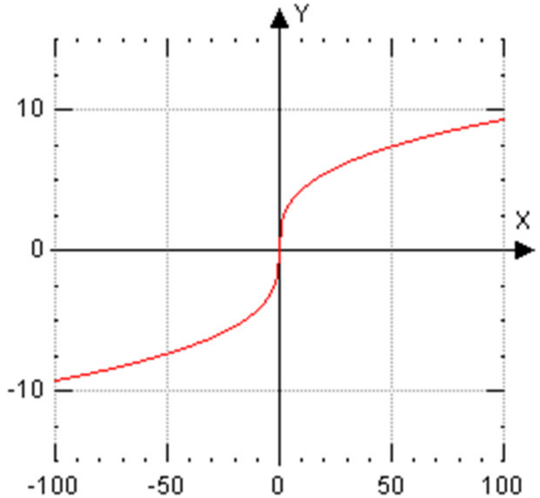
FUNKTIONSGRAPHEN II

$$f(x) = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2}$$



- Achsensymmetrie
- Hyperbelfunktion

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{x}$$



- Punktsymmetrie
- Wurzelfunktion

DEFINTIONS-/ WERTEBEREICH

Definitionsbereich:
Alle Zahlen, die in einem Ausdruck/ Term **eingesetzt** werden dürfen, werden mittels Mengeneigenschaften in Abhängigkeit der zugehörigen Variablen beschrieben.

- Ein **Polynom** vom Grade n ist stets für alle reellen Zahlen definiert.
- Eine **Wurzel** darf nun aus positiven Termen inkl. der NULL gezogen werden.
- Bei **Brüchen** ist darauf zu achten, dass der Nenner nicht NULL wird.

Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{2-x}; D = \{x \in \Re \mid x \leq 2\}$ $\quad g(x) = \frac{x}{x+3}; D = \Re \setminus \{-3\}$

Wertebereich:
Die Zahlen, die durch einen Ausdruck/ Term berechnet werden können, ergeben den Wertebereich einer Funktion (y-Achse).

- Mit **geradem** Exponenten können nicht alle reellen Zahlen abgebildet werden.
- Mit **ungeradem** Exponenten werden alle reellen Zahlen erreicht.
- Bei **Brüchen/ Wurzeln** muss auf Ausnahmen geachtet werden (Definitionsbereich).

Beispiel: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2; W = \{y \in \Re \mid y \geq 2\}$ $\quad g(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}; W = \Re \setminus \{0\}$

AUFGABEN

Geben Sie bei folgenden Funktionen den Definitions- bzw. Wertebereich an, bestimmen das Symmetrieverhalten und zeichnen Sie eine grobe Skizze.

a) $$f(x) = \frac{4}{x^2 - 9}$$

b) $$g(x) = x^3 - 5x + \frac{1}{2x}$$

c) $$h(x) = \sqrt[4]{-3 \cdot \left(x^3 - 8\right)}$$

Welche neuen Begriffe habe ich kennen gelernt?